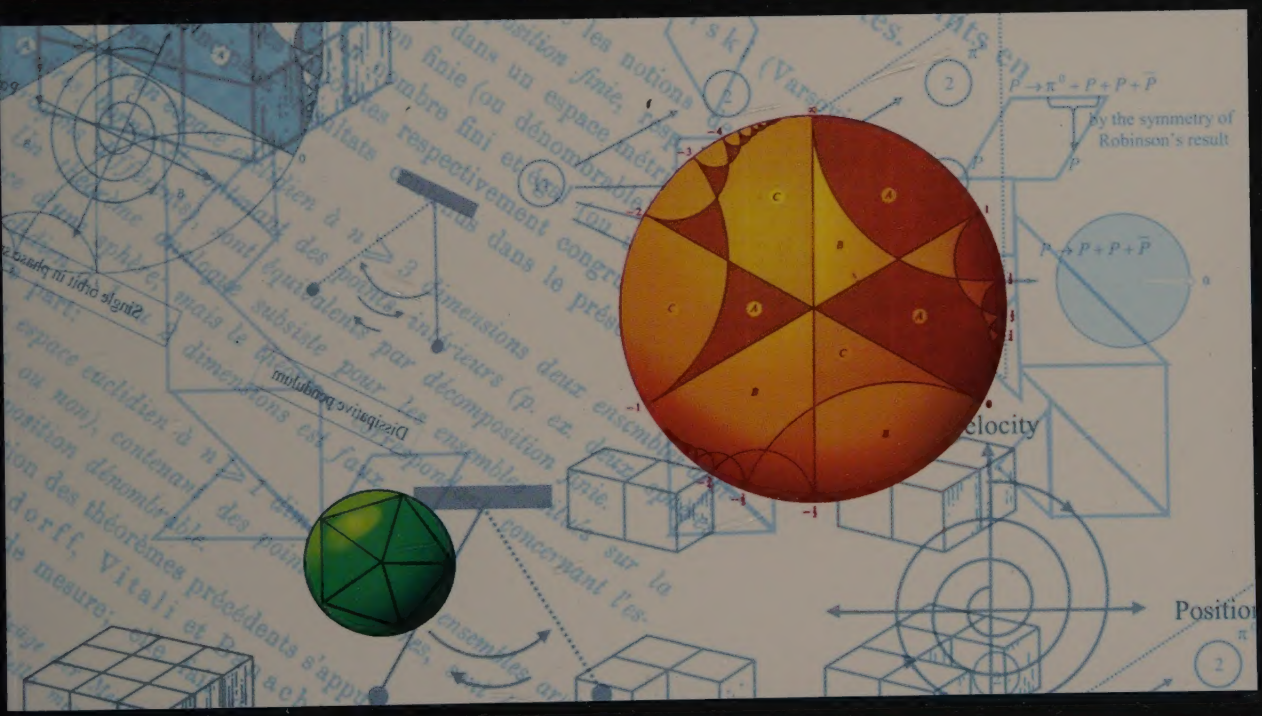
EL CHÍCHARO Y EL SOL

UNA PARADOJA MATEMÁTICA



LEONARD M. WAPNER
TRADUCCIÓN DE ROBERTO ELIER

Quehacer científico y tecnológico
Universidad Veracruzana

EL CHÍCHARO Y EL SOL

UNA PARADOJA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD VERACRUZANA

Raúl Arias Lovillo
Rector
Porfirio Carrillo Castilla
Secretario Académico
Víctor Aguilar Pizarro
Secretario de Administración y Finanzas
Agustín del Moral Tejeda
Director General Editorial

EL CHÍCHARO Y EL SOL

UNA PARADOJA MATEMÁTICA

QUEHACER CIENTÍFICO Y TECNOLÓGICO

EL CHÍCHARO Y EL SOL

UNA PARADOJA MATEMÁTICA

LEONARD M. WAPNER

TRADUCCIÓN DE ROBERTO ELIER

UNIVERSIDAD VERACRUZANA

XALAPA, VER., MÉXICO

2011

Portada: Lizeth Pedregal, a partir de un diseño de Edith López Salazar

Clasificación LC:	QA248 W36 2011
Clasif. Dewey:	511.322 W36
Autor personal:	Wapner, Leonard M., 1948-
Título:	El chícharo y el sol : una paradoja matemática / Leonard M. Wapner, traducción de Roberto Elier.
Edición:	1a ed.
Pie de imprenta:	Xalapa, Ver., México : Universidad Veracruzana, 2011.
Descripción física:	248 p. : il. 26 cm.
Series:	(Quehacer científico y tecnológico)
Notas:	Traducción de: The pea & the sun : a mathematical paradox. Incluye bibliografía (p. 233-239) e índice.
ISBN:	9786075020655
Materia:	Paradoja de Banach-Tarski--Historia.
Autor secundario:	Elier, Roberto, traductor.

DGBUV 2011/02

Título original: The Pea and the Sun: a Mathematical Paradox
© A. K. Peters, LTD, 2005
Todos los derechos reservados

Primera edición, 25 de febrero de 2011
© Dirección General Editorial
Hidalgo 9, Centro, Xalapa, Veracruz, México
Apartado postal 97, CP 91000
diredit@uv.mx
Tel/fax (228) 8185980; 8181388

ISBN: 978-607-502-065-5

Impreso en México
Printed in Mexico

CONTENIDO

Reconocimientos, 11

Introducción, 13

.1.
HISTORIA: LISTA DE PERSONAJES, 17

Georg Cantor. Fundador de la teoría de conjuntos moderna, 21

Stefan Banach y Alfred Tarski, 34

Kurt Gödel. La consistencia del axioma de elección, 45

Paul Cohen. La independencia del axioma de elección, 51

Apéndice, 59

.2.
ROMPECABEZAS FALACES Y OTRAS CURIOSIDADES, 67

Paradojas y antinomias, 67

Falacias de rompecabezas, 75

Apéndice, 85

.3.
PRELIMINARES, 89

Teoría de conjuntos, 90

Isometrías, 99

Equivalencias de descomposición, 108

Equidescomponibilidad, 120

.4.
HACIA LA PARADOJA
DE BANACH-TARSKI, 129

Desplazamiento al infinito, 134

Estiramiento, 139

El polvo de Cantor, 148

Las paradojas de construcción de Vitali, 155

El diccionario Hyperwebster de Stewart, 159

La paradoja de Sierpiński-Mazurkiewicz, 162

Apéndice, 165

.5.
ENUNCIACIÓN Y DEMOSTRACIÓN
DEL TEOREMA, 167

Enunciado del teorema de Banach-Tarski, 167

Demostración del teorema de Banach-Tarski, 168

Apéndice, 182

.6.
SOLUCIÓN, 189

Declarar falaces los resultados, 189

Aceptar el teorema tal cual, 190

Reinterpretación del resultado, 192

.7.
EL MUNDO REAL, 197

La fantasía, 198

Especulación, 200

Cosmología, 203

El caos, 204

Física de partículas, 209

La realidad, 213

.8.
AYER, HOY Y MAÑANA, 217

Ayer, 218

Hoy, 219

Mañana, 223

Bibliografía, 233

Índice analítico, 241

Fe de erratas

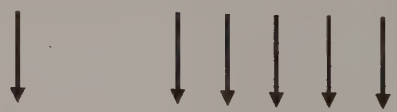
En la página 143 la **Figura 4.13. Biyección de [0, 1] sobre (0, 1)** aparece así:

$$[0,1]: \quad A \cup \{0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots\}$$

$$(0,1): \quad A \cup \{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \ldots\}$$

debió aparecer así:

$$[0,1]: \quad A \cup \{0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots\}$$



$$(0,1): \quad A \cup \{\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \ldots\}$$

RECONOCIMIENTOS

¡Primero la familia! Le agradezco a mamá, Lea, y a papá Ben, por haber sido los iniciadores de este proyecto. Gracias, mamá, por quererme, apoyarme y alentarme a escribir. ¡Ahora escribe tu libro! Gracias, papá, por tu cariño y por haberme enseñado muchas cosas. Te extraño. Mi esposa, Mona, merece todo un libro de gratitud por su amor y apoyo. Tal vez lo escriba. Pero por ahora –y siempre– ¡te amo! Y para nuestra hija Kirsty, gracias por ser siempre tú. Te quiero mucho.

Estoy agradecido con muchas personas. Me complace, pues, expresar mi gratitud a todos los que me ayudaron a escribir este libro. De modo que comienzo agradeciendo a mis profesores desde la escuela elemental hasta la de posgrado. He tomado como ejemplo de estilo docente el de muchos de estos profesores y espero inspirar a mis alumnos tanto como mis maestros me inspiraron a mí.

Desde la escuela primaria he disfrutado la lectura de libros de divulgación (para el gran público) científica en general y de matemáticas en particular. Estos libros y artículos desempeñaron parte no pequeña en mi decisión de estudiar y, por último, enseñar matemáticas. De todo lo que he leído y sigo leyendo destaco a Martin Gardner como la influencia más profunda en mi elección de materia y profesión. El lector debe estar enterado de que Martin Gardner redactó la columna "Juegos Matemáticos" para la revista *Scientific American* de 1956 a 1981, y de que escribió más de setenta libros sobre asuntos varios. Aunque no posee título académico formal en el campo de las matemáticas (su grado es en filosofía), ha sido elogiado por matemáticos de todo el mundo y estoy seguro de no ser el único que tiene una inmensa deuda de gratitud para con él.

Agradezco a mis colegas de la Universidad El Camino por haber tenido la paciencia de contestar mis preguntas y brindarme ayuda. (No les quedaba otra, pues soy muy insistente.) En particular agradezco a Bill Hemmer por haberme alentado a seguir escribiendo en un momento en que estaba yo considerando abandonar el proyecto. Acredito a Bob Lewis el haberme convencido de que los conjuntos de Cantor son en verdad algo notable. Agradezco a mi buen amigo y colega Paul Wozniak por haber revisado partes del manuscrito y por sus críticas constructivas. Y debo mucho a Michael Berg, profesor de matemáticas de la Universidad Loyola Marymount, sin duda uno de los matemáticos más talentosos que conozco.

Me disculpo por haber usado toda la potencia del correo electrónico para imponerles mi presencia a autoridades de categoría mundial en el tema que trato. Jan Mycielski, Stan Wagon, Matthew Foreman, Robert French, Karl Svozil y Yiannis Moschovakis respondieron amablemente mis preguntas y en su mayoría están citados en este libro. Gracias a todos ellos.

En esta época digital en que la información se halla tan sólo a un clic de distancia por medio de Internet, está allí como una fuente no más confiable que la biblioteca de ladrillos y cemento. He visitado muchas mientras trabajaba en este libro y agradezco especialmente a la administración, a los bibliotecarios y al personal de apoyo de la Science Library de la Universidad de California en Irvine. Forman ellos un grupo inteligente cuya ayuda me fue de lo más valiosa.

Le doy las gracias muy particularmente a mi amigo de tanto tiempo, Howard Glassman, quien contestó un torrente interminable de preguntas de computación y me auxilió con las figuras.

Por último, deseo agradecer a Alice y Klaus Peters y al personal de A. K. Peters, Ltd. por su confianza, su pericia y orientación a lo largo de todo este proyecto. Gracias también a Charlotte Henderson por su ayuda editorial, a Darren Wotherspoon por el diseño y la producción y a Susannah Sieper por su trabajo mercadotécnico.

Len Wapner

INTRODUCCIÓN

Querido Dios: Cuando me quede sólo una
hora de vida permíteme, por favor, pasar
ese tiempo en una clase de matemáticas que
me parezca que durará para siempre.

ORACIÓN DE UN ESTUDIANTE ABURRIDO

El reloj se había detenido y yo me estaba quedando dormido.

Era 1971, y yo estaba concluyendo mis estudios de posgrado en matemáticas en la Universidad de California, Los Ángeles. Estaba en una clase llamada *Measure and Integration* [Medida e integración]. Qué aburrición. A pesar de que las matemáticas eran mi asignatura principal, este curso en particular no me interesaba. Estaba profundamente enamorado –y lo sigo estando– de las matemáticas. Había pasado la mayor parte de mi vida adulta enseñando esta materia en El Camino College. Este curso era indispensable para mi posgrado, pero lo que deseaba era apartarlo del camino. Cuando miré el reloj no tenía idea de que estaba a punto de meterme en un teorema en verdad notable.

El profesor estaba en la parte final de su disertación y la resumió dibujando una esfera sólida (una pelota) en el pizarrón. Explicó que acababa de dar la demostración del hecho de que la pelota se podía dividir en cinco partes y luego volver a armarla, de modo muy parecido a la manera como se arma un rompecabezas pero de tal modo que podrían formarse dos esferas, cada una de forma y volumen igual al original.

De inmediato evoqué una de esas bolas de esponja roja que usa un mago. Se pone una de ellas en la palma de la mano y la cierra. Cuando la abre, hay dos bolas. ¿O palomas? Pone una paloma en una caja y la cierra; la abre ¡y salen volando dos palomas! Supuse, pues, que se trataba de un truco de ésos. No había puesto atención y no tenía la menor idea de las intenciones del profesor.

Continuó: "Tenemos así el Teorema o la Paradoja de Banach-Tarski. En una forma equivalente de este teorema se establece que se puede dividir

en un número finito de partes un sólido de cualquier tamaño, digamos un chícharo, y luego volver a armarlo para formar otro sólido de cualquier forma y volumen especificados, digamos los del Sol. En consecuencia, a este paradójico teorema de Stefan Banach y Alfred Tarski se le llama a veces la paradoja del chícharo y el sol".

¿Es concebible *aus einer Mücke einen Elefanten machen*? ¿Puede hacerse un elefante de un mosquito? ¡Y no era el Día de los Inocentes! ¿Era un chiste? Y de ser así, ¿cuál era el desenlace? Como no estaba dispuesto a arriesgarme con una pregunta en potencia embarazosa, me limité a pasear la vista por el salón para ver la reacción de mis compañeros.

El que estaba a mi derecha levantó la mano: "Claro está que estos resultados son puro sinsentido, ¿no? Lo que quiero decir es que no está usted sugiriendo que se pueda cortar una manzana en cinco piezas y luego reacomodarlas para formar dos manzanas, ¿no es así? ¿Está usted diciendo que se puede crear algo de nada?"

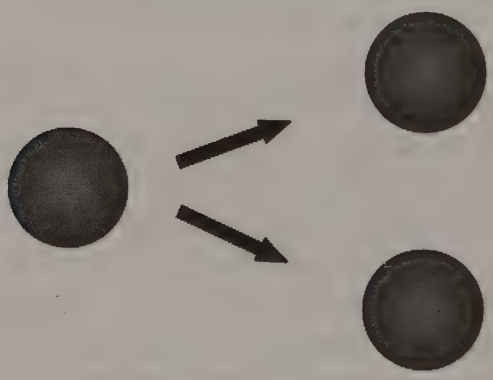


Figura 1.1. Dos esferas sólidas de una.

Había yo dejado de ver el reloj y tenía la mirada clavada en el profesor. Esperaba que nos soltara la frase final del chiste y nos dejara salir o que nos explicara por qué, en realidad, la demostración del teorema era incorrecta. Lejos de eso, descartó las preguntas del estudiante con una respuesta displicente: "Bien, ¿saben? Es sólo una de esas cosas que ocurren porque ocurren. Resultados como éste son comunes cuando trabajamos con conjuntos no mensurables, el Axioma de elección, etc. La prueba es válida y el teorema se acepta".

Terminó la clase y yo quedé confundido.

Tal fue mi introducción al notable teorema de Banach-Tarski. En el prólogo de *The Banach-Tarski Paradox*, de Stan Wagon, Jan Mycielski se

refiere a este teorema cuando escribe (Wagon 85, p. xi): "Yo creo que este es el resultado más asombroso de las matemáticas teóricas." Por razones obvias, a la publicación del teorema en 1924 sobrevino una tormentosa controversia entre los matemáticos. ¿Cómo podían aceptarse resultados que, como éste, contradijeran tan escandalosamente el sentido común?

Conforme la población en general fue enterándose del teorema, empezó a encenderse y propagarse la polémica. Un furioso ciudadano demandó que el congreso de Illinois declarara fuera de la ley la enseñanza de este resultado en las escuelas del estado (Addison 83, p. 28). Los interesados se dividieron en dos bandos: el de quienes aceptaban los bellos pero contraintuitivos resultados y el de quienes los rechazaban como absurdos.

A pesar de la proliferación, en revistas especializadas, de artículos sumamente técnicos sobre el tema, poco se ha escrito para el público en general. En realidad, al examinar los estantes de las bibliotecas y buscar en Internet se obtienen pocas cosas de interés para quienquiera que no tenga algún grado en matemáticas. De ahí que sea tan mal entendida la naturaleza del teorema. He tenido estudiantes que preguntan: "¿Cómo es eso de que los matemáticos pueden duplicar la materia? Demostraron cierto teorema que conduce a que podríamos construir máquinas duplicadoras, ¿no es así?"

El espíritu de este libro es tornar accesible el teorema, dando de él una visión periodística en vez de otra técnicamente matemática. En el capítulo 1 trato asuntos históricos y presento la lista de personajes. Las estrellas son Georg Cantor, fundador de la moderna teoría de conjuntos; Stefan Banach y Alfred Tarski, los coestelares; Kurt Gödel, el lógico más brillante del siglo XX; y, por último, Paul Cohen, profesor de matemáticas de la Universidad de Stanford, que da una sensación de cierre al asunto.

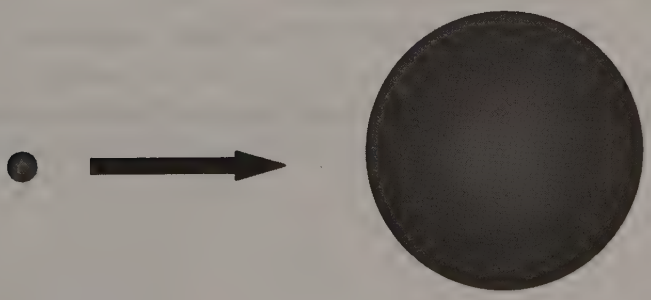


Figura 1.2. El chícharo y el sol..

En el capítulo 2 expongo una serie de juegos matemáticos que suponen la disección geométrica y el rearmado de figuras, en los cuales algo se gana o se pierde mágicamente. Aunque de construcción ingeniosa, debo subrayar que se incluyen como mera recreación, comparados con el teorema de Banach-Tarski, de impresionante solidez matemática.

En el capítulo 3 explico los conocimientos mínimos necesarios para apreciar íntegramente el teorema. Al estar escrito para un público general que sepa álgebra y geometría, se excluyen los formalismos matemáticos. Para los lectores interesados en profundizar en el tema y que tengan los conocimientos matemáticos indispensables será de gran ayuda la bibliografía.

Juguetonamente titulé el capítulo 4 Paradojas BT precoces (renombrado Hacia la paradoja de Banach-Tarski). Se trata de curiosidades matemáticas que implican una ganancia visible por descomposición y rearmado. Matemáticamente hablando, están entre los juegos del capítulo 2 y el teorema de Banach-Tarski.

En el capítulo 5 se enuncia y demuestra el teorema de Banach-Tarski. Se omite el formalismo matemático para que sea accesible al gran público, sin demérito de su correcta exposición.

La solución de la paradoja se da en el capítulo 6. En cierto modo una paradoja pierde su carácter en cuanto se resuelve; pero ninguna exposición de este bello teorema estaría completa sin alguna explicación de su magia. Los magos y los matemáticos tratan misterios semejantes de modos opuestos. Los magos nunca revelan sus secretos; los matemáticos se esfuerzan por exponer y aclarar los secretos.

¿Tienen realidad física las consecuencias del teorema de Banach-Tarski o es sólo que las matemáticas se han salido de cauce? En el capítulo 7 se darán algunas respuestas.

En el capítulo 8 se cierra la exposición con un vistazo al pasado y al futuro del descubrimiento matemático.

Como matemático docente de toda una vida, tengo más respeto por las preguntas que por las respuestas. Por tanto, me sentiré satisfecho si al concluir el libro el lector tiene más preguntas que cuando empezó a leerlo.

.1.

HISTORIA: LISTA DE PERSONAJES

El buen cristiano debe precaverse de los matemáticos
y de todos los que hacen vacuas profecías.
El peligro existe, pues los matemáticos han hecho
pacto con el diablo para confundir el espíritu
y condenar al hombre a las cadenas del Infierno.

SAN AGUSTÍN

Los logros matemáticos más importantes se entienden mejor dentro del contexto de la disciplina y su historia. Las matemáticas no se producen en el vacío, y en el caso del notable trabajo de Banach y Tarski, hay por lo menos otros tres matemáticos a los que se les debe reconocimiento: Georg Cantor, Kurt Gödel y Paul Cohen. Este capítulo es una historia en cuatro partes del Teorema Banach-Tarski:

1. Georg Cantor introduce los conceptos de teoría de conjuntos y aritmética transfinita.
2. Stefan Banach y Alfred Tarski publican el teorema de Banach-Tarski.
3. Kurt Gödel muestra que el Axioma de Elección es consistente,[1] es decir, no se contradice con los demás axiomas de la teoría de conjuntos.
4. Paul Cohen demuestra que el Axioma de Elección es independiente de los demás axiomas de la teoría de conjuntos.

---

[1] *Consistente* se ha convertido en un término de matemáticas y lógica que significa: libre de contradicciones internas, acepción que *grosso modo* concuerda con la 2a que a esta voz da el DRAE. [T.]

Rindiendo una caravana a Julio Verne, este capítulo bien pudo haberse llamado "Alrededor del mundo en ochenta *años*", pues supone una verdadera epopeya internacional en la que están representados Alemania, Polonia, Austria y Estados Unidos.

Antes de empezar, consideremos brevemente la naturaleza de un logro matemático. ¿Los matemáticos descubren o crean? ¿Descubrieron Stefan Banach y Alfred Tarski su misteriosa paradoja explorando las profundidades de la verdad matemática, o sencillamente la crearon? Preguntas por el estilo pueden hacerse al fotógrafo de paisajes o retratos. Al ecologista Ansel Adams se le conoce más por sus pasmosas fotografías en blanco y negro del valle de Yosemite y la Sierra Nevada. ¿*Registró* las vistas o las creó? Como imágenes en blanco y negro con extremos efectos de luz y sombra, las fotografías no son impresiones realistas de lo que uno ve realmente cuando va de excursión a esos lugares. En este sentido las fotografías son creadas (artísticamente) con un buen ojo y un equipo de lo más avanzado. Pero estas bellas fotografías también representan lo más grandioso de la naturaleza y se tiene la sensación de estar viendo *los dones de Dios* en las fotos de Adams. ¿Creó Adams esta belleza o simplemente la registró con la técnica y el equipo correctos?

Con respecto a las matemáticas existen dos opuestos puntos de vista. El *platonismo* (o *realismo matemático)* sostiene que los objetos matemáticos existen *fuera* de nosotros y son independientes de la mente humana. ¡"Pi" en el cielo! Los teoremas, las demostraciones, las construcciones y las soluciones a problemas no resueltos están ahí, esperando ser descubiertas por los investigadores matemáticos, prácticamente del mismo modo que las gemas están esperando a los geólogos. Según los platónicos, las formas, las cantidades y las relaciones matemáticas siempre han existido, cuando menos en sentido teórico. No son más creación de la mente humana que lo que un diamante lo sería de un geólogo. Un matemático talentoso no crea matemáticas. Se descubren las matemáticas. Tal vez la visión popular del matemático sea que es platónico, igual que otros sólo piensan en el matemático como científico, no como creador o artista. A Georg Cantor y a Kurt Gödel se les considera platónicos. Se cree que hoy la mayoría de los matemáticos son platónicos, pero pocos estarán dispuestos a admitirlo. El matemático y defensor de los derechos humanos Lipman Bers (Albers *et al.*, 90, p. xiii) afirma: "En su trabajo un matemático es siempre platónico. No importa lo que diga:... Creo que en matemáticas siempre tendrá la sensación de descubrir... Las matemáticas son, al decir de Ron Graham, la realidad última..."

Al punto de vista opuesto se le llama *formalismo*, y sostiene que las matemáticas son un lenguaje compuesto de símbolos y convenciones para manipular esos símbolos que, cuando se siguen *las reglas del juego*, dan lugar a teoremas, demostraciones, construcciones, etc. Son construcciones (constructos)[2] de la mente humana. No es preciso que estos teoremas, conjuntos, etc., se apliquen al mundo físico. Las matemáticas permanecen separadas de la realidad física como una creación humana, prácticamente como la lengua hablada o la obra de arte.

El tercer punto de vista es el *constructivista (intuicionista, finitista)*, que asegura que sólo los objetos matemáticos que se pueden construir de manera finita tienen significado. Los constructivistas tienden a estar en contra de los procesos infinitos y los teoremas de existencia que no construyen el objeto considerado. De modo que los platónicos y los formalistas tienen puntos de vista opuestos (véase figura 1.1) y los constructivistas tienen problemas con ambos grupos.

Y usted, ¿es platónico, señor lector? Lea lo que sigue y decídalo.

El número π es la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro. Se ha demostrado que π es irracional. (Un número real es racional si es el cociente de dos enteros. Si un número es racional, tendrá una expansión decimal que se repite o que termina. Si un número real no es racional, entonces es irracional.) En realidad se ha comprobado que π es trascendente, lo cual significa que no es la raíz de ninguna ecuación algebraica. En consecuencia es imposible calcular π (la expansión decimal π) con exactitud por medios algebraicos (suma, resta, multiplicación, división, extracción de raíz cuadrada, etc.). Como hay modos de representar π como la suma de una serie infinita (por ejemplo:

$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \ldots)$$

es posible, teóricamente, calcular π con cualquier número de lugares decimales. A pesar del hecho de que con computadoras se ha calculado π con miles de millones de lugares decimales, quedan por ser contestadas muchas preguntas en relación con posibles patrones dentro de la expansión decimal de π. ¿Se presentan todos los dígitos con frecuencia infinita? ¿Se presentan con igual frecuencia? ¿Hay patrones de dígitos dentro de la expansión de π? Hay una lista interminable de preguntas como ésas, algunas de las cuales acaso nunca sean contestadas.

---

[2] *Constructo* es uno de esos términos que disfrazan o adornan lo que son meras "creaciones mentales", "modelos cuasi teóricos" o sólo "suposiciones". [T.]

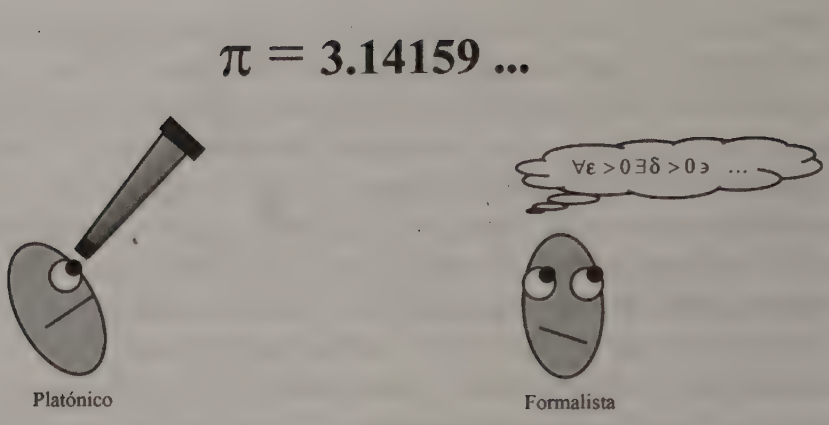


Figura 1.1. "Pi" en el cielo.

Más adelante, al tratar de la obra de Kurt Gödel, veremos que hay preguntas y conjeturas matemáticas que son independientes de nuestro sistema axiomático. Esto es: son cuestiones que no se podrán responder nunca, y se les califica de *indecidibles*. A manera de comprobación, supongamos que se ha demostrado que la siguiente pregunta es indecidible: ¿contiene un número infinito de ceros la expansión decimal de π en nuestro sistema axiomático?

Si su respuesta es que sí o que no, entonces es usted platónico. El platónico ve que la expansión decimal está ahí afuera, en algún lugar, y reconoce el hecho de que de nuestro sistema axiomático no saldrá nunca una respuesta. Sin embargo, la respuesta debe existir, y puede haber más pruebas matemáticas, quizá en forma de un sistema axiomático extendido que decidirá el problema.

El formalista y el constructivista desechan la cuestión considerándola sin sentido. Si no tenemos los medios de obtener la respuesta, entonces no la hay. (Filosóficamente hablando, esto evoca la antiquísima pregunta de "Si en un bosque en el cual no hay nadie que lo oiga, cae un árbol, ¿produce sonido o no?)

Decida usted: ¿es platónico?

Tenga en mente que los platónicos y los formalistas trabajan en problemas matemáticos semejantes y tienden a concordar en la mayoría de las cosas. Ambos demuestran teoremas nuevos, encuentran nuevas demostraciones para teoremas antiguos y hallan soluciones a problemas hasta cierto momento no resueltos. Cada grupo acepta en general las matemáticas del otro, pero discrepan en cuanto a lo que ellas representan a fin de cuentas.

Figura 1.2. Georg Cantor (1845-1918). (Tomada de UA Halle. Rep. 40 I C 11. Reimpresa con autorización de la Martin Luther Universität Halle-Wittenberg.)

Los cinco protagonistas de la historia de Banach-Tarski son (cronológicamente) Georg Cantor, Stefan Banach, Alfred Tarski, Kurt Gödel y Paul Cohen. La historia es internacional: empieza en Alemania, pasa a Polonia, luego a Austria y concluye en Estados Unidos. Comencemos con la historia de Georg Cantor, platónico por admisión propia y, en general, reconocido como fundador de la moderna teoría de conjuntos.

GEORG CANTOR. FUNDADOR DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS MODERNA

Georg Cantor (véase figura 1.2) nació en San Petersburgo en 1845 y revolucionó las matemáticas al establecer la teoría de conjuntos *(Mengenlehre)* como disciplina matemática. En el proceso pudo realizar o consumar la noción de infinito creando una aritmética de los infinitos –la aritmética transfinita–. Como platónico con intereses teológicos, muchas veces se vio a sí mismo como secretario o mensajero de Dios.

La demostración del teorema de Banach-Tarski, expuesta en el capítulo 5, requiere de manipular un número infinito de puntos de la esfera sólida y la manipulación de una infinidad de rotaciones de tales puntos. Sin las revolucionarias ideas de Cantor sobre la teoría de conjuntos y la aritmética transfinita, de seguro que Stefan Banach y Alfred Tarski no

habrían podido idear y publicar su teorema. Es más, las matemáticas del siglo XX, tal como las conocemos, no existirían.

Los sueños de espacio y tiempo infinitos se apoderan de modo natural de quienquiera que vea el cielo o contemple los ciclos día-noche. Históricamente, el infinito es místico: lo han contemplado los científicos, los filósofos y los teólogos, igual que los matemáticos. Por su propia naturaleza se dificulta su definición, y en cierto tipo de estudios puede ser conveniente rechazar el concepto como falto de sentido. La historia del infinito puede ser en sí infinita. Cantor no fue ciertamente el primero en considerar el concepto. Para comprender íntegramente, pues, lo logrado por Cantor, nos remontaremos al filósofo griego Zenón, del siglo IV a. C.

Conocido por sus paradojas sobre el movimiento y la continuidad, Zenón fue uno de los primeros en argumentar seriamente acerca de los procesos infinitos. En su paradoja de la Dicotomía asegura que ningún corredor puede llegar nunca a la meta, pues para lograrlo primero debe llegar a la marca de la mitad de la pista, luego a la marca de la mitad de la mitad de la pista, y así sucesivamente. Por tanto, la fracción del trayecto completado puede expresarse como la suma infinita $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$ Como se tendría que completar un número infinito de fracciones en una cantidad de tiempo finita, el corredor nunca alcanzaría la meta de la carrera. Seguramente es imposible realizar una cantidad infinita de tareas en un tiempo finito. ¿Cierto?

En otra famosa paradoja de Zenón, Aquiles juega una carrera contra una tortuga, a la cual da una pequeña ventaja inicial. Según Zenón, Aquiles no podrá nunca rebasar a la tortuga, pues para conseguirlo primero debe llegar al punto de donde partió la tortuga, momento en el cual ésta ya habrá avanzado hasta otro punto. Cuando Aquiles llegue a éste, la tortuga habrá avanzado hasta otro punto más. Como el proceso se prolonga infinitamente, no hay esperanza alguna de que el quelonio pueda ser rebasado en una cantidad finita de tiempo.

Claro está que Zenón sabía que en realidad el corredor de la paradoja de la Dicotomía completaría el trayecto y que Aquiles superaría a la tortuga. Zenón, sin embargo, no hizo esfuerzo alguno por resolver estas paradojas. Tendrían que pasar más de dos mil años antes de que las matemáticas resolvieran tales problemas.

Aristóteles, en el siglo III a. C., fue el primero en distinguir entre infinito real e infinito potencial. El filósofo escribe (Aristóteles, 207b):

> De ahí que este infinito sea potencial... y no una realidad permanente, sino que consiste en un proceso de llegar a ser, como el tiempo... Con las mag-

nitudes ocurre lo contrario... De hecho ellos [los matemáticos] no necesitan el infinito y no lo usan. Postulan sólo que la línea recta puede prolongarse tanto como lo deseen... En consecuencia, para los fines de la demostración, para ellos no habrá diferencia al usar en vez de aquél este infinito, no obstante que su existencia se halle en la esfera de la magnitud real.

Santo Tomás de Aquino (Aquino, Ia 7.4), teólogo cristiano del siglo XIII, afirma que:

> Es imposible la existencia de una multitud infinita real. Pues cualquier conjunto de cosas que considere uno debe ser un conjunto específico. Y los conjuntos de cosas son especificados por el número de cosas que contienen. Ahora bien, ningún número es infinito, pues el número resulta de contar íntegramente un conjunto de unidades. De ahí que ningún conjunto de cosas pueda ser en realidad inherentemente ilimitado, ni tampoco que por casualidad lo sea.

El gran matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855), considerado por algunos el mejor matemático de todos los tiempos, escribió a un amigo en una carta (Maor 87, p. 55): "Con la mayor vehemencia debo protestar en contra de tu uso del infinito como algo consumado, pues esto es algo que las matemáticas nunca permiten. El infinito no es sino una *façon de parler (manera de hablar)*."

Y hasta hoy, en la formación matemática, que pasa por la geometría, el álgebra y el cálculo, el infinito se trata en general no como un número real sino más bien como la cualidad de ser de tamaño ilimitado. En las matemáticas elementales casi nunca se formulan proposiciones como $x = \infty$. En vez de eso vemos $x \to \infty$, sugiriendo que el infinito es potencial y no una cantidad que pueda alcanzarse.

(El popular símbolo ∞ usado para el infinito fue introducido por el matemático inglés John Wallis en el siglo XVII. Tal vez lo tomó del numeral romano para 100 millones, que consiste en un ocho acostado inscrito en un rectángulo. El propio símbolo se remite a un proceso sin fin, tal vez el de una serpiente devorándose a sí misma.)

Si bien los matemáticos y los filósofos que antecedieron a Georg Cantor sólo pudieron ver el infinito con telescopios matemáticos, tratándolo como algo potencial, Cantor consumó, o realizó, el infinito, y lo puso en nuestras manos para manipularlo y explorarlo. Su obra, revolucionaria en su época, trajo consigo controversia y tristeza que finalmente contribuyeron a su muerte.

De ascendencia judía, Georg se mudó con su familia a Frankfurt, Alemania, en 1856. Su padre se había convertido al protestantismo y su madre era católica de nacimiento. Su padre lo estimuló para que siguiera una carrera de ingeniería, pero el joven Cantor estaba más interesado en la filosofía de los teólogos medievales. Sus intereses y talento se inclinaron a la filosofía, la física y las matemáticas. Por último, sus padres le dieron permiso de seguir la carrera de matemáticas. Cantor era agradecido y se esforzó siempre por vivir a la altura de las expectativas de su padre. Algunos sugieren que esta presión puede haber causado los problemas de salud mental que padeció en sus últimos años.

Obtuvo su doctorado en la Universidad de Berlín en 1867 con una tesis sobre teoría de los números. Luego asumió el puesto inicial de *Privatdozent* en la Universidad de Halle. Fue promovido a profesor asociado y luego a profesor de matemáticas. Pero nunca realizó su sueño de ser profesor de la Universidad de Berlín. Culpó de este fracaso, durante toda su vida, a su archienemigo Leopold Kronecker (1823-1891), que criticó duramente el concepto que Cantor tuvo del infinito.

El concepto de conjunto, tal y como lo desarrolló Cantor, terminó por entrelazarse con el de infinito cuando empezó a ocuparse del tamaño o *cardinalidad* de los conjuntos. La cardinalidad de un conjunto finito no es más que el número de elementos que contiene. Así, la cardinalidad de {2, 4, 6} es 3. ¿Pero cuál puede decirse que sea la cardinalidad del conjunto de los números naturales [o de contar] {1, 2, 3, ...} o la del conjunto de todos los números reales? ¿Tienen cardinalidades infinitas? ¿Son iguales sus cardinalidades? ¿Tiene sentido decir que algunos infinitos son mayores que otros infinitos?

Para responder estas preguntas, Cantor empezó por examinar los conjuntos finitos y señaló que dos conjuntos finitos tenían la misma cardinalidad si era posible poner sus respectivos miembros en correspondencia de uno a uno. Por tanto, los conjuntos {2, 4, 6} y {8, 9, 10} tienen la misma cardinalidad (3) por la correspondencia $2 \leftrightarrow 8$, $4 \leftrightarrow 9$, $6 \leftrightarrow 10$. Luego propuso que lo mismo podía decirse de los conjuntos infinitos. Por ejemplo, el conjunto de los números pares {2, 4, 6,...} tendría la misma cardinalidad infinita que el conjunto de los números naturales {1, 2, 3,...} porque hay una clara correspondencia de uno a uno entre los dos conjuntos. (Véase figura 1.3.)

En consecuencia, a pesar de que los números pares forman un subconjunto propio de los números de contar, ambos conjuntos contienen el mismo número (infinito) de elementos y se dice que tienen la misma

cardinalidad. (Un subconjunto propio de un conjunto dado es un subconjunto del conjunto dado pero no igual a éste.) Ésta sería la primera de las muchas paradojas teóricas que al parecer contradecían la noción común de Euclides de que el todo es mayor que la parte. Por paradójico que sea, Cantor se valió de su idea para definir un conjunto infinito. Definió al conjunto infinito como aquél que podía ponerse en correspondencia biunívoca con cualquier subconjunto propio de sí mismo, eliminando así la vaguedad de las nociones previas de conjuntos infinitamente grandes.

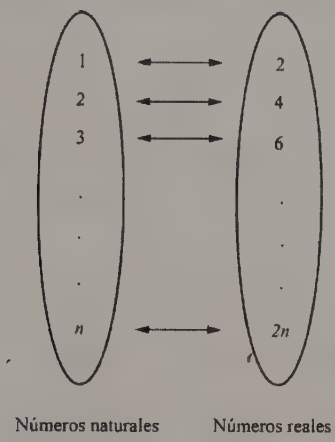


Figura 1.3. Correspondencia de uno a uno entre dos conjuntos infinitos.

Entre otros conjuntos que tienen la misma cardinalidad de los números naturales están el conjunto de los números impares, el conjunto de todos los cuadrados perfectos y el conjunto de los primos. En cada caso, los miembros del conjunto son *numerables* o *contables*, en el sentido de que pueden *listarse*,[3] poniéndolos en correspondencia de uno a uno con los números naturales. Al instante surge naturalmente la pregunta de si todos los conjuntos infinitos tienen la cardinalidad de los números naturales: ¿hay una correspondencia biunívoca entre los números racionales y los naturales? ¿Y qué del conjunto de todos los números reales? Cantor sentó la hipótesis de una categorización o jerarquía de infinitos y así nació el asunto de la *aritmética transfinita*, la aritmética de los infinitos.

[3] Es decir, hacer una lista de esos números, acepción aceptada en el DRAE. (T.)

Para investigar, Cantor consideró el conjunto de los números racionales positivos –todos los números positivos que pueden escribirse como la razón de dos enteros–. Cantor tenía razones para suponer que este conjunto podría ser más numeroso que el de los naturales, porque entre dos números racionales cualesquiera existe otro número racional. De hecho, entre dos racionales cualesquiera existe un número infinito de números racionales. Los matemáticos emplean el adjetivo *denso* para describir tales conjuntos. En contraste con ello, conjuntos tales como los naturales, los pares, los cuadrados perfectos y los primos tienen brechas entre sus números. (Los números naturales están separados por una unidad, los pares por dos unidades, etcétera.)

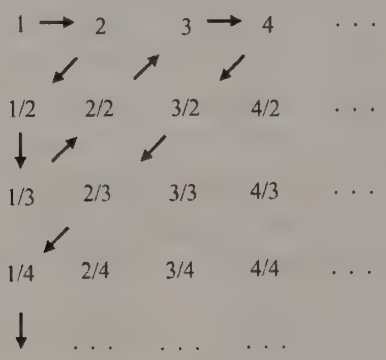


Figura 1.4. Conteo de los números racionales.

El propio Cantor se asombró al descubrir que el conjunto de los números racionales se podía poner en correspondencia biunívoca con los naturales, por el método de entretejer una diagonal. (Véase figura 1.4.)

La fila superior de esta ordenación muestra todos los números racionales, por orden de magnitud y con denominador uno. (Omitimos el denominador de esta primera fila.) La segunda fila muestra todos los números racionales por orden de magnitud y denominador dos. El patrón prosigue, horizontal y verticalmente, de modo que todos los números racionales positivos tienen su propia posición en la tabla. Siguiendo las flechas, se podría hacer una lista consecutiva de estos números racionales, procurando omitir cualquier número que ya hubiera aparecido en otra forma. (Por ejemplo, empezamos la lista con "1" y luego omitimos las subsiguientes repeticiones de este valor, que se presenta en la forma de 2/2, 3/3, etc.) Así, nuestra lista aparecería como 1, 2, 1/2, 1/3, 3, 4, 3/2, 2/3, 1/4...

Claramente se ve que cada número positivo racional aparecería una y sólo una vez en esta sucesión. Refiriéndose a ésta, habría el primer número racional (1), el segundo número racional (2), el tercer número racional (1/2), y así sucesivamente. El conjunto de los números racionales positivos es, pues, numerable, ya que puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales. Por consiguiente, a pesar del hecho de que el conjunto de los racionales es denso, hay tantos de ellos como de naturales. Cantor se encontró con que sus propios resultados eran difíciles de comprender, pero, platónico de corazón, se sintió obligado a aceptar sus extrañas conclusiones una tras otra. Y suplicó a los demás que "no culparan al mensajero".

Si un conjunto denso, como el de los números racionales, tiene la misma cardinalidad que los números naturales, entonces quizá todos los conjuntos infinitos sean de esta misma cardinalidad y habría, en este sentido, sólo un infinito. Cantor demostró que todo era de otra manera.

Comenzó restringiendo la investigación a los números reales entre cero y uno. Geométricamente, estos números serían representados por los puntos de un segmento de recta de longitud uno. Obsérvese que cada número puede representarse por una fracción decimal sin término. (En el caso de que una representación decimal sí terminara, podría reemplazarse por otra equivalente que no finalizara. Por ejemplo, el número 3/10, representado comúnmente como 0.3, equivale a la representación 0.2999999...) Cantor hizo ver que no se podían poner en correspondencia biunívoca todos los números reales entre cero y uno con los números naturales, mostrando que la existencia de tal correspondencia desembocaba en una contradicción.

La prueba empieza suponiendo que existe tal correspondencia. Supongamos que la lista, o sucesión, es como la de la figura 1.5.

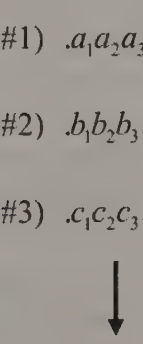


Figura 1.5. Demostración de la diagonalización de Cantor.

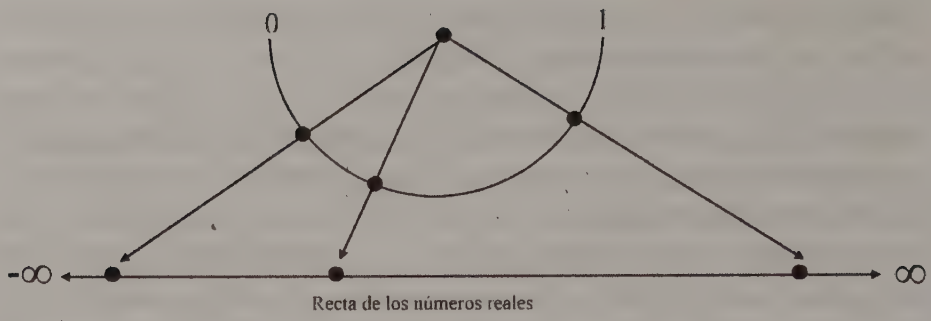


Figura 1.6. Cardinalidad del continuo.

Luego Cantor construyó un número real $x = x_1x_2x_3\ldots$ de modo que $x_1 \neq a_1$, $x_2 \neq b_2$, $x_3 \neq c_3\ldots$ Lo cual significa que se crea un número real cambiando sistemáticamente cada uno de los dígitos de la diagonal principal de la ordenación y formando el número *x*. El nuevo número *x* difiere cuando menos en un dígito decimal de cada número de la lista. Se infiere que el propio *x* no puede estar en la lista, lo que indica que esta es incompleta. Esto contradice la suposición conforme a la cual se hizo la lista. En conclusión, el conjunto de los números reales entre cero y uno no es numerable. Cantor denotó la cardinalidad de este continuo infinito con la letra *c*.

Es relativamente sencillo demostrar que *c* representa también la cardinalidad de todos los números reales. Esto se hace tomando un segmento de recta de longitud uno (que consiste en un conjunto de puntos de cardinalidad *c)* y doblándolo para que forme una semicircunferencia. La figura 1.6 muestra una correspondencia de uno a uno entre el conjunto de los números entre cero y uno y la recta entera de los números reales.

Cantor había establecido así la existencia de cuando menos dos infinitos: el primero fue la cardinalidad de los números naturales y el segundo, la cardinalidad del continuo, o sea el de todos los números entre cero y uno o la totalidad de la recta de los números reales. ¿Podría haber más infinitos, algunos más grandes que otros? Cantor formuló la hipótesis de una jerarquía de infinitos (de ahí el nombre de transfinito), denotada mediante un subíndice que se pone a la primera letra del alfabeto hebreo: א, álef. El infinito más pequeño, la cardinalidad de los números naturales, sería $\aleph_0$ [álef cero] y los infinitos mayores, en sucesión, serían $\aleph_1$, $\aleph_2$, etc. Teorizó, pues, $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 <\ldots$ etc. En el capítulo 3 veremos al menos una manera de construir tal jerarquía.

Específicamente, veremos que c, la cardinalidad del continuo, puede concebirse como (el producto formado empleando 2 como factor un número contable de veces).

Cantor se preguntó si podría haber una cardinalidad infinita entre $\aleph_0$ y c. Creía (pero no pudo demostrar) que la respuesta era "no", deduciendo de ello las ecuaciones $c = \aleph_1$ o $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Esta ecuación, o conjetura, conocida como la *Hipótesis del continuo de Cantor,* fue elevada de categoría en 1900 por el matemático alemán David Hilbert (1862-1943) cuando colocó el asunto de la hipótesis del continuo como el problema número uno de su famosa lista de 23 problemas matemáticos no resueltos. Hilbert presentó su lista en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos realizado en París. Según él, los problemas abarcaban los temas de los cuales debían ocuparse los matemáticos del siglo XX. Hasta la fecha, más de la mitad de estos problemas ha sido resuelta. Resolver uno de estos problemas sería un gran honor para cualquier matemático. Aunque obsesionado por demostrar (o refutar) la conjetura, Cantor fue incapaz de resolver el problema de un modo u otro. Como veremos al final de este capítulo, hasta 1963 Paul Cohen, de la Universidad de Stanford, no resolvió el asunto, pero cuando lo hizo fue de modo sorprendente.

En realidad, el primer problema de la famosa lista de Hilbert consta de dos partes relacionadas. La primera tiene que ver con la hipótesis del continuo, de Cantor, tal y como se describió ya. En la segunda parte se pregunta si el conjunto de los números reales puede ser reordenado para poderlo considerar un *conjunto bien ordenado.* (Un conjunto bien ordenado es aquél en que todo subconjunto no vacío tiene primer elemento. El ordenamiento convencional del conjunto de los números reales no es un conjunto bien ordenado en el sentido de que un subconjunto, como el de todos los números mayores que cero, carece de primer elemento.) Es demostrable que el teorema del buen ordenamiento, que afirma que todo conjunto puede ser bien ordenado, equivale al axioma de Elección, componente crítico de la demostración del teorema de Banach-Tarski. En otras palabras, contribuir a solucionar el primer problema de Hilbert, o de plano resolverlo, tendría un efecto directo, de uno u otro modo, sobre la manera como debe interpretarse el resultado de Banach y Tarski.

Con la revolución sobreviene el conflicto y en los conceptos revolucionarios de la teoría de conjuntos y la aritmética transfinita de Cantor empezaron a verse contradicciones y a provocarse controversias. (Paradojas teóricas de conjuntos específicos, como las observadas por

Cesare Burali-Forti, Bertrand Russell y el propio Cantor, se tratarán en los capítulos 2 y 3.) El matemático alemán Felix Hausdorff (1868-1942) describe el tema como "un campo en donde nada es evidente, cuyas proposiciones verdaderas con frecuencia son paradójicas y cuyas proposiciones plausibles son falsas" (Hausdorff 14, p. v). El matemático francés Henri Poincaré (1854-1912) habló de la teoría de conjuntos de Cantor "como una enfermedad, una dolencia perversa de la que algún día se curarían los matemáticos" (Aczel 00, p. 111). A ciertos conjuntos de cardinalidad infinita se les llamó "polvo de Cantor". Hermann Weyl (1885-1955), uno de los más grandes matemáticos del siglo XX, acuñó la expresión "niebla sobre la niebla" para describir despectivamente la sucesión ascendente de los alefs de Cantor (Stewart 96, p. 67). Cantor mismo conocía bien la enredada controversia y se daba cuenta de que estaba en oposición a todas las concepciones de aceptación general. Por eso dijo: "Me coloco a mí mismo en cierta oposición a los puntos de vista sostenidos por la mayoría sobre el infinito matemático y a las opiniones con frecuencia defendidas sobre la esencia del número" (Kline 80, p. 200).

A la cabeza de los críticos de Cantor estaba Leopold Kronecker, ex profesor suyo en la Universidad de Berlín. La perspectiva de Kronecker era la de un finitista y, como tal, no toleraba objetos matemáticos que no pudieran construirse de modo finito. (Se le conoce por su afirmación de que "Dios hizo los enteros; todo lo demás es obra humana".) Llevó sus ideas al extremo de negar la existencia de los números irracionales, retrocediendo a la filosofía pitagórica del número. Objetó con vehemencia las nociones cantorianas de infinito, calificándolas de "misticismo". Siendo sensibles y temperamentales ambos personajes, los ataques se volvieron personales. Kronecker llamaba a Cantor "charlatán" y "corruptor de la juventud" (Dauben, p. 1), al tiempo que Cantor culpaba directamente a su antagonista de haberle impedido ocupar un puesto de profesor en la Universidad de Berlín. Cantor hizo un intento de reconciliación invitando a Kronecker a encontrarse con él en un centro de vacaciones en los montes Harz. Kronecker aceptó y se encontraron. Por desgracia sus divergencias persistieron.

Se acrecentaron las presiones mentales para Cantor y pronto estuvo al borde del colapso. Frustrado por su incapacidad para resolver su hipótesis del continuo, deprimido por su fracaso en lograr un puesto docente en la Universidad de Berlín y agotado por sus batallas contra Kronecker, empezó a perder interés en las matemáticas formales y se le desarrolló una obsesión con William Shakespeare y Francis Bacon.

Promovió la impopular suposición de que Francis Bacon había sido el verdadero autor de las obras teatrales de Shakespeare y publicó, a sus propias expensas, artículos al respecto. Era como si la obsesión de Cantor por la hipótesis del continuo hubiera sido sustituida por sus sospechas sobre la conexión Bacon-Shakespeare. Mientras daba en Leipzig una conferencia sobre su hipótesis Bacon-Shakespeare recibió la noticia de la muerte de su hijo menor, Rudolf. Su madre murió el mismo año.

En 1911, Cantor fue invitado a hablar, en calidad de Erudito Extranjero Distinguido, en la Universidad de Saint Andrews, de Escocia. Como había sido el departamento de matemáticas el que había extendido la invitación, todos suponían que trataría aspectos de la teoría de conjuntos y de la aritmética transfinita. Para embarazo de todos, habló de la conexión Bacon-Shakespeare.

Durante estos años conflictivos Cantor sufrió tres colapsos nerviosos. Sus últimos años los pasó en Halle en una institución para enfermos mentales. Murió de un ataque al corazón el 6 de enero de 1918. A su funeral asistieron sólo unos cuantos familiares cercanos.

En su lápida se lee:

Dr. Georg Cantor
Profesor de matemáticas
3.3 1845-6. 1.1918

A pesar de las paradojas y otras dificultades asociadas con la obra de Cantor, se reconoce que esta es monumental. Bertrand Russell dijo que fue uno de los grandes intelectos del siglo XIX. David Hilbert describió la aritmética transfinita de Cantor como "la flor más admirable del intelecto matemático y uno de los logros más elevados de la actividad humana puramente racional", y defendió vigorosamente el infinito de Cantor al decir que "Nadie nos expulsará del paraíso que Cantor creó para nosotros" (Kline 80, p. 204).

En un intento por salvar la obra de Cantor de las paradojas y las críticas, la teoría de conjuntos fue axiomatizada (formalizada) en 1908 por el matemático alemán Ernst Zermelo (1871-1953). Erigió un sistema de ocho axiomas que definieron las relaciones fundamentales entre conjuntos y garantizaron la existencia del conjunto vacío y los conjuntos infinitos. La axiomatización de la teoría de conjuntos fue análoga a la axiomatización de la geometría de Euclides con sus diez postulados. En 1922, el lógico Abraham Fränkel (1891-1965) hizo sus propias contribu-

ciones y el sistema (que consta de ocho a diez axiomas, según se le formule) se conoce hoy como la teoría de conjuntos de Zermelo-Fränkel.

1. El axioma de existencia
2. El axioma de extensión
3. El axioma de especificación
4. El axioma de pareamiento
5. El axioma de unión
6. El axioma de potencias
7. El axioma de infinito
8. El axioma de reemplazamiento
9. El axioma de elección

Al lector casual los axiomas pudieran parecerle razonablemente suficientes, pues de modo implícito los emplearon Cantor y otros. (El primer axioma garantiza la existencia de por lo menos un conjunto. El segundo, que dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos miembros. Los axiomas restantes parecen ser igualmente plausibles.) Hay, sin embargo, una cajita sorpresa en el grupo, el *Axioma 9: el axioma de elección* es de aspecto inocente. Establece que si S es una colección de conjuntos no vacíos, entonces puede formarse un nuevo conjunto de elementos, llamado *conjunto de elección*, escogiendo un elemento de cada uno de los conjuntos de la colección. Si la colección de conjuntos es finita, entonces la existencia de un conjunto de elección salta a la vista, siguiéndose de un número finito de pasos de los otros axiomas. En tal caso el axioma de elección, que basa la existencia de un conjunto de elección en la fe sola, no es necesario. Como el número de conjuntos es finito (tres en la figura 1.7), es posible construir en realidad un conjunto de elección.

Pero formar un conjunto de elección puede ser problemático cuando la colección de conjuntos es infinita. ¿Existe realmente tal conjunto? En algunos casos está claro que sí. Si la colección fuera a consistir en todos los intervalos cerrados de la recta numérica de longitud uno, entonces podríamos prescribir un método de escoger un número de cada conjunto, quizá el punto medio, para formar un conjunto de elección. Esto es: un conjunto de elección podría consistir en todos los puntos medios de todos los intervalos cerrados de longitud uno. ¿Pero qué ocurre si la colección fuera el conjunto de todos los subconjuntos de los números reales? ¿Qué método podría prescribirse para escoger un elemento de cada conjunto? Sencillamente no lo hay. Todo lo que podemos hacer

es suponer que puede hacerse, y al hacer esta suposición invocamos el axioma de elección.

Bertrand Russell esclareció el significado de este axioma con su bien conocido ejemplo de *los zapatos y los calcetines*. Para escoger un zapato de cada uno de infinitos pares de zapatos, se puede formar un conjunto de elección seleccionando simplemente el zapato derecho de cada par. Cada par tiene un zapato derecho, de modo que puede definirse claramente un conjunto de elección. No meramente *suponemos* que podemos hacerlo. ¡Lo hemos hecho! Por otro lado, para escoger un calcetín de un número infinito de pares de calcetines debemos recurrir al axioma de elección. No hay manera de definir o de exhibir un conjunto de elección. Cuanto podemos hacer es suponer su existencia.

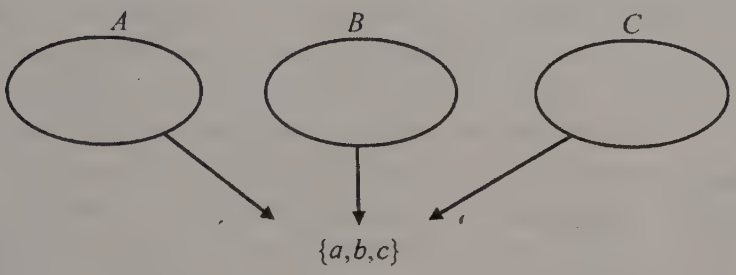


Figura 1.7. El Axioma de elección.

Russell observó (Vilenkin 68, p. 84) que "a primera vista parece obvio, pero cuanto más se piensa en eso, tanto más extrañas parecen volverse las deducciones de este axioma; y al final se deja de entender qué significa".

Las protestas de prestigiados matemáticos como Emile Borel (1871-1956), Felix Bernstein (1878-1956), René Bair (1874-1932), Henri Lebesgue (1875-1941) y Jacques Hadamard (1865-1963) se centraron en el hecho de que se está haciendo una elección, a pesar de que no se podría especificar ninguna regla para la elección. ¿Cómo podrían emplearse en las demostraciones matemáticas tales actos de fe? Los defensores del axioma argumentan que no habría necesidad de especificar una regla para garantizar que sí existe una elección. Lo que importa es la *existencia*, no la regla en sí.

Como veremos en los capítulos que siguen, aceptar el axioma de elección puede conducir a resultados muy en contra de la intuición (y quizá hasta perturbadores). El teorema de Banach-Tarski es sólo una muestra.

Algunos matemáticos prefieren evitar este axioma, ya que no es de construcción y, para decir lo menos, su uso puede tener consecuencias peculiares. Sus defensores razonan que usar el axioma produce resultados matemáticos que no podrían obtenerse de otra manera. Además, negar el axioma iría más en contra de la intuición, que los resultados obtenidos al aplicarlo. ¿Y ahora qué?

Gregory Moore nota (Moore 82, p. 2) la extraña evolución del axioma de elección como yendo del "... uso inconsciente al consciente y, para muchos matemáticos de la época, a la evitación consciente". Los matemáticos que evitan este axioma (y la controversia asociada con él) adoptan el llamado sistema axiomático ZF (los axiomas del 1 al 8, pero no el de elección). Los matemáticos que admiten el axioma usan el sistema axiomático ZF + C = ZFC (los axiomas del 1 al 9).

¿Pero cuáles son esos resultados que van contra la intuición, que son perturbadores y que pueden deducirse de tal axioma al parecer inocente? En *Introduction to the Foundations of Mathematics*, Raymond Wilder se refiere al axioma de elección cuando escribe (Wilder 52, p. 74): "Después de todo, ¡nadie presta atención a la flama de un cerillo hasta que empieza a incendiarse el bosque!" En 1924 Stefan Banach y Alfred Tarski prendieron el cerillo y encendieron una controversia destinada a seguir ardiendo hasta 1963, año en que Paul Cohen, de la Universidad de Stanford, llevó el problema a una extrañísima conclusión.

STEFAN BANACH Y ALFRED TARSKI

En 1924, los dos matemáticos polacos Stefan Banach y Alfred Tarski publicaron el artículo de treinta y cuatro páginas titulado "Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes" [Sobre la descomposición de conjuntos de puntos en partes respectivamente congruentes].

Aparte de su igual nacionalidad y su colaboración de 1924, los dos matemáticos tenían poco en común, tanto en lo profesional como en lo demás.

Stefan Banach (véase figura 1.8) nació el 30 de marzo de 1892, en Cracovia, hijo de Katarzyna Banach y Stefan Greczek. Sus padres no estaban casados y por eso le pusieron el nombre del padre y el apellido de la madre. Stefan nunca conoció a su madre, que lo cedió después de que lo bautizaron; su padre se rehusó a revelar la identidad de ella. Una vez bautizado, él lo envió a vivir con su abuela paterna, en Ostrovsko. Cuando ella enfermó, su padre lo envió a vivir a Cracovia,

con Franciszka Plowa y su hija María. El guardián de María, el intelectual francés llamado Juliusz Mien, simpatizó con Stefan, le enseñó francés y posiblemente le infundió otros intereses académicos, entre ellos las matemáticas.

La educación primaria y la secundaria las hizo Stefan en Cracovia, donde se volvió amigo de Witold Wilkosz, futuro profesor de matemáticas de la Jagiellonian University, y de Marian Albiński. Roman Kaluża, en *Through a Reporter´s Eyes –The Life of Stefan Banach* (Kaluża 96, p. 5), presenta una selección de las memorias de Albiński:

> Stefan Banach, como yo lo recuerdo, fue un buen amigo. Callado, pero no sin un amable sentido del humor, era de natural reservado. Usaba siempre un uniforme limpio y bien planchado, igual que todos nosotros. Su situación financiera lo obligaba a servir de tutor a estudiantes más jóvenes así como a estudiantes *del centro*, pero nunca pareció necesitado. Debo agregar que él fue tutor sin paga de sus compañeros de clase.
>
> Desde los primeros grados Banach y Wilkosz estuvieron unidos por su amor a las matemáticas. Durante los recesos escolares los veía frecuentemente solucionando problemas de matemáticas que para el humanista que era yo parecían estar en chino.

Figura 1.8. Stefan Banach (1892-1945). (Cortesía del Instituto de Matemáticas de la Academia Polaca de Ciencias.)

Otro de sus compañeros de clase, Adolf Rożek, recordaba que (Kaluża 96, p. 9):

> Banach era delgado, pálido y de ojos azules. Disfrutaba el trato con sus colegas, pero fuera de las matemáticas no le interesaba nada. Cuando decía algo, lo hacía muy rápidamente, tanto como pensaba matemáticamente. Estaba increíblemente dotado para el pensamiento y el cálculo rápidos, al grado de que sus interlocutores lo creían clarividente.

A la edad de 18 años Banach entró al Politécnico de Lviv para estudiar ingeniería. En aquel tiempo Lviv era una hermosa ciudad multicultural, centro de la cultura y la ciencia polacas. Ahí, en 1916, fue donde encontró a Hugo Steinhaus, profesor de matemáticas del politécnico. El encuentro casual fue importante tanto profesional como personalmente para Banach, pues Steinhaus influiría vigorosamente en él en los años por venir. Steinhaus alguna vez sostuvo que Banach era el "descubrimiento más grande de su vida" (Kaluża 96, p. 24). Tal vez se deba a Steinhaus que Banach se decidiera por ser matemático investigador y que conociera y desposara a Lucja Braus, que pasó con él el resto de su vida. Steinhaus y Banach empezaron a publicar la revista *Studia Mathematica* y los dos matemáticos fundarían conjuntamente la Escuela de Matemáticas de Lviv.

Antes de 1920, Banach era en esencia autodidacta, y no tenía grado universitario (era pasante). Por esta y otras razones, obtuvo su doctorado en matemáticas de modo poco usual. El matemático polaco Otto Nikodym narra (Kaluża 96, pp. 32-33) cómo Banach había sido inducido por sus colegas para que escribiera su tesis:

> ... los profesores de Lviv se dieron cuenta de que el material para la tesis de Banach estaba listo desde hacía tiempo, pero que el antedicho no tenía intención de escribirlo. En cuanto Banach demostró su teorema, no estaba muy interesado en convertirlo en un artículo publicable. El proceso lo aburría. Estaba fascinado por las especulaciones mentales pero aborrecía la labor de escribirlas en limpio... El profesor Ruziewics dio instrucciones a uno de sus asistentes para que acompañara a Banach en sus frecuentes visitas a los cafés, y que discretamente lo interrogara sobre su trabajo para, más tarde, escribir los teoremas y las demostraciones de Banach. Cuando estuvo mecanografiada toda esta información, se la presentaron a Banach quien entonces redactó el texto. Así fue cómo su tesis doctoral fue escrita por fin.

Originalmente escrita en polaco, fue traducida al francés y publicada en *Fundamenta Mathematicae* como "Sur lés operations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations integrals" [Sobre las operaciones en los conjuntos abstractos y su aplicación a las ecuaciones integrales]. El artículo, considerado por muchos matemáticos el nacimiento del *análisis funcional*, introdujo los *espacios de Banach* y el *teorema del punto fijo de Banach*, conceptos familiares a muchos de los matemáticos investigadores de hoy.

Figura 1.9. Alfred Tarski (1902-1983). Foto de estudiante en la Universidad de Varsovia (circa 1918).

Alfred Tarski (originalmente Alfred Teitelbaum) (véase figura 1.9), nacido el 14 de enero de 1902, en Varsovia, es considerado uno de los cuatro lógicos más grandes, junto a Aristóteles, Frege y Gödel. Creció en el seno de una familia acomodada, asistió a la Schola Mazowiecka, institución para intelectuales. Descrito por sus profesores como extraordinariamente dotado (estudiaba ruso, alemán, francés, griego, latín y hebreo, además de las asignaturas programadas), tenía planeado estudiar biología. Luego de servir en el ejército polaco, Teitelbaum ingresó en la Universidad de Varsovia en 1918. Poco después de haber empezado un curso de lógica, su profesor de la materia, Stanislaw Lesniewski, lo convenció de que mejor estudiara matemáticas. Publicó su primer artículo, sobre teoría de conjuntos, cuando tenía 19 años y se doctoró en 1924, lo que lo convirtió en el más joven que alcanzara ese grado en la Universidad de Varsovia.

Por esta época Alfred y su hermano cambiaron de religión, de judíos a católicos romanos, y asimismo de apellido, a Tarski. Es posible que el antisemitismo haya contribuido a estos cambios que lo hacían aparecer "más" polaco, incrementando así sus probabilidades de obtener un cargo universitario. Fue en 1924 cuando él y su colega polaco Stefan Banach publicaron su famoso artículo.

Sin duda, fue la obra precursora de Georg Cantor en teoría de conjuntos lo que allanó el camino a los matemáticos del siglo XX. Pero un artículo en particular, el de Felix Hausdorff, publicado en 1914, fue el que en realidad hizo que se iniciara la colaboración de Banach y Tarski, que culminaría con el famoso teorema de ambos. El teorema de Hausdorff, conocido después como la paradoja de Hausdorff, asegura que una esfera (la superficie de una bola), menos un número relativamente pequeño de puntos, se puede partir en tres conjuntos disjuntos de puntos –A, B y C– de modo que A, B, C, y la unión de B y C son congruentes entre sí. Los detalles se dan en el capítulo 5, donde exponemos las paradojas asociadas con esta descomposición. En cierto sentido, cada uno de los tres conjuntos A, B y C es tanto la mitad como la tercera parte de la esfera (menos el pequeño número de puntos). Se deduce que la esfera, menos el pequeño conjunto de puntos, se puede descomponer entonces en un número finito de conjuntos y rearreglarse para formar dos copias de sí mismo. La prueba de Hausdorff se funda en el axioma de elección. (La demostración de la paradoja de Hausdorff se expone en el capítulo 5, como parte de la demostración del teorema de Banach-Tarski.) Hubo matemáticos que tomaron el resultado de Hausdorff como testimonio para rechazar el axioma de elección. Borel escribió que "La contradicción tiene su origen en la aplicación [...] del axioma de elección de Zermelo [...] Si se desdeña la precisión y la lógica, entonces se llega a contradicciones" (Borel 14, pp. 255-256).

Pero Hausdorff dio una interpretación diferente, sugiriendo que algunos conjuntos de puntos (en este caso subconjuntos de la esfera) no tienen medida definible del área de la superficie, caso en el que no habría paradoja. Claro está que el hecho de que algunos conjuntos inconmensurables puedan existir realmente de alguna manera es en sí paradójico.

Esta construcción, obra de Hausdorff, es el meollo de la paradoja de Banach-Tarski. Diez años después de que Hausdorff publicó este teorema, Banach y Tarski descubrieron independientemente una manera de extender la paradoja a la superficie esférica entera, lo que permitiría la duplicación de la esfera completa.

Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes.

Par

St. Banach (Lwów) et A. Tarski (Varsovie).

Nous étudions dans cette Note les notions de *l'équivalence des ensembles de points par décomposition finie*, resp. *dénombrable*. Deux ensembles de points situés dans un espace métrique sont dits équivalents par décomposition finie (ou dénombrable), lorsqu'ils peuvent être décomposés en un nombre fini et égal (ou une infinité dénombrable) de parties disjointes respectivement congruentes.

Les principaux résultats contenus dans le présent article sont les suivants:

Dans un espace euclidien à $n \geqslant 3$ dimensions deux ensembles arbitraires, bornés et contenant des points intérieurs (p. ex. deux sphères à rayons différents), sont équivalents par décomposition finie.

Un théorème analogue subsiste pour les ensembles situés sur la surface d'une sphère; mais le théorème correspondant concernant l'espace euclidien à 1 ou 2 dimensions est faux.

D'autre part:

Dans un espace euclidien à $n \geqslant 1$ dimensions deux ensembles arbitraires (bornés ou non), contenant des points intérieures, sont équivalents par décomposition dénombrable.

La démonstration des théorèmes précédents s'appuie sur les résultats de MM. Hausdorff, Vitali et Banach[1]), qui concernent le probléme général de mesure; elle fait donc usage de *l'axiome*

[1]) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 401 et 469.
G. Vitali, *Sul problema della mesura dei gruppi di punti di una retta*, Bologna 1905.
St. Banach, *Sur le problème de mesure*, Fund. Math. IV, 1923, p. 30—31.

Figura 1.10. Artículo de Banach y Tarski [Banach y Tarski 24]. (Reimpreso con autorización de *Fundamenta Mathematicae*.)

Luego demostraron que la paradoja podía extenderse más aún, hasta una pelota sólida. Su artículo conjunto (véase figura 1.10), escrito en francés, apareció en *Fundamenta Mathematicae*, prestigiada revista polaca de matemáticas. Los autores escogieron el francés como si fuera un idioma "más internacional" que el polaco para publicaciones científicas. El teorema, conocido ahora como Teorema de Banach-Tarski o Paradoja de Banach-Tarski, establece que una esfera sólida (bola, pelota)

se puede descomponer en un conjunto finito de partes (tan pocas como cinco) cada una de ellas de tamaño idéntico a la original. A esta forma del teorema se le llama *versión de duplicación*. Una versión equivalente, quizá más pasmosa, asegura que un sólido de cualquier tamaño y forma, digamos un chícharo pequeño, puede descomponerse en un número finito de piezas y rearmarse para formar un sólido de cualquier tamaño y cualquier forma, digamos los del Sol. A esta versión, conocida como la *forma fuerte* o *versión de amplificación del teorema*, se le llama también versión del *chícharo y el Sol*, que sirve de título a este libro. En el capítulo 5 demostraremos primero la versión de duplicación, a partir de la cual estableceremos fácilmente la versión de la amplificación.

Que el teorema pueda enunciarse en términos geométricos sencillos, sin jerga matemática, lo hizo llegar al gran público. Causó controversia entre los matemáticos, pues su demostración dependía del axioma de elección y su conclusión era en realidad insólita. Pero para el lego, la propia conclusión llamaba la atención. Los matemáticos pueden ser tolerantes, aun apreciativos, para con los resultados antiintuitivos; pero el público en general podría mistificar esa afirmación. J. W. Addison (Addison 83, p. 28) escribe que en un obituario de Alfred Tarski que apareció en *California Monthly* se lee: "Un indignado ciudadano demandó al Congreso de Illinois ¡que declarara fuera de la ley la enseñanza de estos resultados en las escuelas del estado!" (Parece ser, pues, que ¡Cantor no fue el único matemático que intentó corromper las mentes juveniles!)

Así fue como los debates sobre la teoría de conjuntos, el axioma de elección y ahora el inaudito teorema de Banach-Tarski se intensificaron y durante 40 años esperaron la solución. Sería obra del matemático austriaco Kurt Gödel y del norteamericano Paul Cohen representar el desenlace y bajar el telón.

Stefan Banach y Alfred Tarski se dedicaron a satisfacer sus propios intereses después de su colaboración singular. Banach siguió escribiendo artículos en compañía de Steinhaus y, en 1939, fue electo presidente de la Sociedad Polaca de Matemáticos. A Banach se le acredita haber creado el *estilo polaco* de matemáticas, que consiste en que los matemáticos se congregan en un café a charlar y a resolver problemas. Fue cliente regular del Café Escocés, de Lviv, donde se reunían, entre otros matemáticos, Steinhaus, Ulam, Mazur, Kac, Schauder y Kaczmarz. En su tiempo, Banach sugirió que se llevara registro de estos problemas, en la forma de un cuaderno de notas y nombró custodio del mismo al jefe de meseros. Birkhäuser publicó una versión en inglés de las notas:

The Scottish Book: Mathematics from de Scottish Café, preparado por Daniel Mauldin con ayuda de Jan Mycielski.

Banach, haciendo gala de patriotismo, permaneció en Polonia durante las guerras y la ocupación del país por los soviéticos y los alemanes. Kaluża relata así (Kaluża 96, p. 82) el apego de Banach a Polonia:

> ...Von Neumann (1903-1957), matemático norteamericano de ascendencia húngara, llamado por algunos "el Gauss del siglo XX", visitó Polonia tres veces entre las guerras. En cada ocasión, por instrucciones de Norbert Wiener, padre de la cibernética, trató de hablar con Stefan Banach para proponerle que emigrara a Estados Unidos; su última visita a Lviv fue en 1937. A la última oferta de trabajo, Banach respondió con una pregunta:
>
> —¿Y cuánto está dispuesto a pagar el profesor Wiener?
>
> —Previmos esta pregunta –respondió el confiado norteamericano, buscando en su bolsillo–. Este es un cheque firmado por el profesor Wiener y en el cual sólo escribió el numeral 1. Por favor agregue cuantos ceros desee.
>
> Banach consideró la oferta por un momento y respondió:
>
> —Esta suma es demasiado pequeña para abandonar Polonia...

En 1939 las tropas soviéticas ocuparon Lviv. Los soviéticos, apreciando en todo su valor las contribuciones de Banach a las matemáticas, lo trataron bien y lo nombraron Decano de la Facultad de Físico-Matemáticas y jefe del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad Jan Kazimierz, renombrada Iván Franko por los soviéticos. En 1941 las tropas alemanas tomaron Lviv y las cosas dieron un giro nefasto para Banach y otros intelectuales polacos. La vida intelectual de Lviv fue destruida virtualmente con ejecuciones de los amigos y colegas de Banach. Éste sobrevivió pero bajo severas condiciones. Le pusieron a trabajar alimentando piojos en el Instituto de Bacteriología Rudolf Weigl, puesto que desempeñó durante el resto de la ocupación nazi de Lviv, hasta julio de 1944.

Zdzislaw Ruziewicz rememora (Kaluża 96, p. 89) la inconcebible escena:

> ... El Instituto empleaba a todos los que habían tenido contacto directo o indirecto con el trabajo académico, es decir, a la mayoría de la *intelligentsia*. Yo también trabajé en el Instituto Weigl. Alimentábamos piojos sentados en una larga banca de madera. Recuerdo que casi instantáneamente empezaron a formarse grupos sociales. Había una mesa donde los alimentadores eran exclusivamente profesores de humanidades. Los alimentadores que

eran biólogos ocupaban otra mesa. Banach y Knaster se sentaban a la misma mesa, y yo tenía la impresión de que estaban absortos en conversaciones de matemáticas.

Las tropas rusas entraron a Lviv en 1944. Seguidamente, bajo el gobierno soviético-polaco, Banach aceptó una cátedra en la Universidad Jagiellonian. Conservó su puesto de presidente de la Sociedad Polaca de Matemáticos y le ofrecieron el cargo de Ministro de Educación. Por desgracia, su salud estaba deteriorada y perdió su batalla contra un cáncer de pulmón el 31 de agosto de 1945, a la edad de 53 años.

Banach se había ganado respeto como uno de los principales matemáticos de Polonia y muchos lo consideran héroe nacional (véase figura 1.11).

En contraste con la de Banach, la vida profesional de Alfred Tarski fue más internacional. Dio clases de lógica en el Instituto Pedagógico de Varsovia hasta 1925, y luego dio clases de matemáticas en la universidad de la misma ciudad y en el Zeromski's Lycée hasta 1939. Fue en el liceo donde conoció a la profesora María Wikowski, y se casó con ella.

Durante los años veinte y los treinta Tarski hizo extenso trabajo en los campos de la lógica matemática, la teoría de conjuntos, la teoría de la medida y el álgebra de Boole. Tal vez Tarski sea mejor conocido por su *Wahrheitsbgriff* [El concepto de verdad], obra sobre las concepciones semánticas de la verdad, que da una definición de verdad rigurosamente matemática.

Tarski viajó mucho por Europa en los años treinta. Visitó la Universidad de Viena y se incorporó al grupo de matemáticos, filósofos y científicos del Círculo de Viena. Entre otros miembros de este círculo figuran Kurt Gödel (cuya obra examinaremos pronto) y Rudolf Carnap, quien empleó el modelo de verdad de Tarski en su propio trabajo sobre semántica. En sus últimos años, las ideas inspiradas por Tarski se aplicaron a la semántica y a la programación de computadoras.

Figura 1.11. Estampilla postal polaca.

Por un giro del destino, Tarski viajó a Estados Unidos en 1939 para asistir a un congreso en la Universidad de Harvard. Dos semanas después de su arribo, el ejército alemán invadió Polonia. Es casi seguro que se habría descubierto su ascendencia judía si hubiera permanecido en Alemania (a pesar de su cambio de apellido y su conversión al catolicismo), y su supervivencia era poco probable. Pidió permanecer en Estados Unidos y, con ayuda de sus colegas, le concedieron asilo. Su esposa y sus dos hijos no pudieron escapar pero fueron capaces de sobrevivir para finalmente reunirse con Tarski en Estados Unidos en 1946. Lamentablemente, sus padres, su hermano y su cuñada fueron muertos por los nazis durante la guerra.

Después de haber desempeñado cargos temporales en Harvard, en el City College de Nueva York y en Princeton, en 1942 fue nombrado catedrático de la Universidad de California, Berkeley, y obtuvo allí el puesto de profesor de tiempo completo en 1946. Permaneció en Berkeley durante el resto de su carrera profesional. Ahí fundó el Grupo de Lógica y Metodología de la Ciencia. Trabajando tanto en el departamento de matemáticas como en el de filosofía, pugnó por el reclutamiento de lógicos aduciendo 'que el diez por ciento del departamento de matemáticas debería estar compuesto por lógicos. Coronó su objetivo y a él se atribuye directamente el haber convertido el plantel de Berkeley en un centro mundial renovado de lógica matemática.

Tarski viajó de Berkeley, como profesor visitante, a la University College de Londres (1950 y 1966), al Instituto Henri Poincaré de París (1955), al Instituto Miller de Investigación Básica de Ciencia (1958-1960), a la Universidad de California, plantel Los Ángeles (1967) y a la Universidad Católica de Chile (1974-1975). Su obra está diseminada en más de 300 publicaciones sobre temas que incluyen la teoría de conjuntos, álgebra, análisis, geometría, lógica matemática y semántica.

A. B. Feferman escribe (Feferman 00):

> Líder y profesor carismático, conocido por su estilo de exposición brillante, preciso y pleno de suspenso, Tarski tenía niveles intimidantemente elevados para sus alumnos, pero al mismo tiempo sabía decir palabras de aliento, particularmente a las mujeres –lo que iba contra la tendencia general de la época–. Algunos estudiantes huyeron espantados, pero permaneció un grupo de discípulos, muchos de los cuales se convirtieron en los líderes de su campo de estudio en un mundo renovado.

Entre sus alumnos figuran Andrzej Mostowski, Bjarni Jonsson, Julia Robinson, Robert Vaught, C. C. Chang, Solomon Fefernam, Richard Montague y Jerome Keisler, todos los cuales alcanzaron gran reputación en los campos de la lógica y las matemáticas.

Tarski tomó muy en serio la enseñanza y se ganó el respeto de sus estudiantes. Steven R. Givant cuenta las siguientes dos anécdotas en su artículo "Retrato de Alfred Tarski" (Givant 91, pp. 18-20). Givant era estudiante, asistente de investigación y amigo íntimo de Tarski en Berkeley:

> Durante el año académico 1969-70, el campus de Berkeley fue escenario de protestas estudiantiles (principalmente contra la guerra de Vietnam), las cuales llegaron a su clímax cuando fue llamada la guardia nacional, que usó gases lacrimógenos para controlar la situación. Ese año, el seminario de Tarski era sobre la teoría de las álgebras de relación (tema que había sido revitalizado con sus propias investigaciones y al que era especialmente afecto). Había unos quince participantes, de todas las corrientes políticas, y a pesar del llamado general a suspender las clases, todos quisieron que Tarski siguiera impartiendo las suyas. Se hicieron arreglos especiales para que las clases se dieran fuera del campus.
>
> Al año siguiente dio conferencias sobre la teoría de las álgebras generales. Cuando a principios de la primavera se vio que no podría cubrir su programa, el grupo le pidió que hiciera de una hora más cada clase (que así duraría dos horas y media). Así se vigorizó su ansia de aprender y accedió a la petición, a pesar del trabajo extra que significaba para él. En años posteriores mencionó varias veces cómo lo había conmocionado la petición.

En 1981 fue premiado con la Berkeley Citation por los rectores de la Universidad de California. Se trata de uno de los honores más altos de la Universidad de California en Berkeley, y se concede anualmente a un pequeño y selecto grupo como reconocimiento a sus logros en sus campos respectivos y también por sus contribuciones al prestigio de la universidad.

Steven Givant y Ralph McKenzie produjeron y editaron una colección en cuatro volúmenes de los artículos de Tarski, titulada *Alfred Tarski–Collected Papers*. Al revisar estos volúmenes, John Corcoran escribe (Corcoran 91, p. 4127):

> La comunidad matemática tiene una gran deuda de gratitud para con Givant y McKenzie, por sus esfuerzos en presentar esta invaluable colección de las

obras de Alfred Tarski. Sólo cuando vemos los artículos de Tarski reunidos en un mismo lugar empezamos a apreciar el alcance y la profundidad de su influencia en el pensamiento matemático moderno y, en particular, en la moderna lógica matemática. La lógica matemática tal y como hoy la conocemos es casi inconcebible sin las aportaciones de Tarski.

KURT GÖDEL. LA CONSISTENCIA DEL AXIOMA DE ELECCIÓN

En 1931 el joven matemático austriaco Kurt Gödel publicó el artículo titulado "Über formal unentschebare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme" [Sobre las proposiciones formalmente indecidibles de los principios matemáticos y sistemas relacionados]. El artículo, que apareció en *Monatsefte für Mathematik und Physik,* recibió poca atención, pues sólo a un grupo reducido de lógicos y matemáticos les interesaba el tema. Era un artículo en extremo técnico, que la mayoría de los matemáticos encontró ininteligible. En 1932 propuso el artículo como su *Habilitationsschrift,*[4] documento que certifica la aptitud para ejercer la profesión docente. Años después, el mundo matemático se enteró de que la "Demostración de Gödel" había desbaratado los cimientos de las matemáticas del siglo XX. Gödel había demostrado que dentro de un sistema axiomático en el cual se pudiera desarrollar la aritmética habría proposiciones cuya validez no podría demostrarse ni refutarse. Esto es: debía esperarse que algunas proposiciones fueran *indecidibles* pues su verificación sería imposible dentro del sistema axiomático dado.

Finalmente las obras de Kurt Gödel y Paul Cohen habían develado los misterios de la hipótesis del continuo de Cantor, el axioma de elección ¡y la propia paradoja de Banach-Tarski!

Kurt Gödel (véase figura 1.12) nació el 28 de abril de 1906 en Brünn, Austria-Hungría (hoy Brno, República Checa), donde inició sus estudios hasta terminar la segunda enseñanza en 1923. En su familia inmediata no había personas instruidas. Se sabe que su padre se había educado para el comercio. Mucho de lo que sabemos del Kurt Gödel joven lo narra su hermano mayor Rudolf (Casti y DePauli 00, p. 56):

---

[4] La *Habilitationsschrift* es la más alta calificación académica en algunas universidades europeas, algo así como un posdoctorado, que tiene que ser defendido ante un comité académico. [T.]

> La vida familiar era armoniosa. Me llevaba muy bien con mi hermano y con nuestros padres. Cuando él tenía más o menos ocho años padeció de reumatismo grave con fiebre elevada; desde entonces se volvió hipocondríaco e imaginaba que tenía un corazón defectuoso, lo cual nunca se pudo determinar médicamente. En general, fue un niño feliz pero tímido. Era muy sensible y le llamaban "Herr Warum" ("Señor por qué") debido a su enorme curiosidad.

Entró a la Universidad de Viena con la intención de estudiar física, pero pronto se cambió a matemáticas. Concluyó su tesis doctoral de matemáticas en 1929.

Gödel fue invitado a unirse al Círculo de Viena, donde se puso en contacto con Hans Hahn, Rudolf Carnap, Karl Menger, Bertrand Russell y otros filósofos, científicos y matemáticos importantes de la época. En los años veinte y treinta, el grupo se reunía semanalmente en la universidad para discutir la relación entre la ciencia y la realidad objetiva. La corriente filosófica del grupo, el *positivismo lógico*, se convertiría en la filosofía guía de la ciencia hasta los años cincuenta.

El famoso artículo de Gödel de 1931 contenía dos resultados que forzaron a los matemáticos a sufrir una especie de corrección, al desvanecerse la esperanza de que todas las ramas de las matemáticas se podrían describir mediante un sistema axiomático completo y consistente (libre de contradicciones internas). En su primer teorema demostró que cualquier teoría axiomatizable en que interviniera el sistema de los números naturales era incompleta, en el sentido de que siempre habría proposiciones que no podrían demostrarse ni refutarse. Entre los ejemplos no matemáticos de tales *proposiciones indecidibles* están las proposiciones autorreferenciales como "Esta proposición no se puede demostrar". Gödel no especificó los sistemas axiomáticos a los cuales podría aplicarse el teorema, pero queda claro que sí se aplica a los axiomas de Russell-Whitehead de la aritmética y a los axiomas de Zermelo-Fränkel (ZF y ZFC) de la teoría de conjuntos.

En su segundo teorema demuestra que de ciertos sistemas matemáticos de axiomas (que incluyan al sistema de los números naturales) es imposible demostrar su consistencia dentro del propio sistema. En respuesta, se sabe que Hermann Weyl dijo que Dios existe porque las matemáticas son sin duda consistentes y que el diablo existe porque no podemos demostrar la consistencia. Según Morris Kline (Kline 80, p. 263): "El resultado de Gödel asestó un golpe mortal a la axiomatización comprensiva, es decir, que abarcara todo".

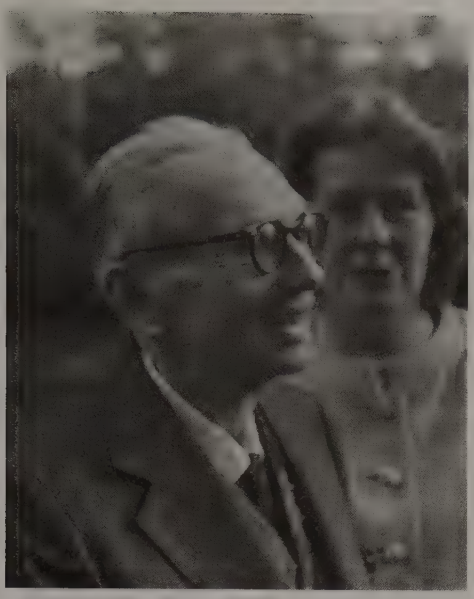


Figura 1.12. Kurt Gödel (1906-1978). (Foto cortesía de los Archivos del Institute for Advanced Study, tomada por A. C. Wighman.)

Si bien muchos verían en este resultado que hizo historia una imperfección o falla de las matemáticas, Gödel lo consideró como la simple declaración de que las matemáticas y la lógica no pueden mecanizarse por completo y que la intuición y la creatividad humanas serían siempre un componente esencial del progreso matemático.

¿Cómo llegó Gödel a estos resultados memorables? Asignando números a símbolos, proposiciones y demostraciones demostró que era posible aritmetizar un sistema axiomático. Cada símbolo, proposición y demostración tuvo entonces asociado un *número de Gödel*. A las proposiciones sobre el sistema (proposiciones metamatemáticas) se les podía asignar también números de Gödel. Luego construyó una afirmación matemática a la que llamó G, la cual establecía que el número *m* de Gödel no era demostrable. Se construye la proposición de modo que su número de Gödel sea *m*. La naturaleza autorreferencial de G hace imposible demostrar que G es verdadera. (En el apéndice de este capítulo se trazan paralelos de los teoremas de Gödel en la física, el arte y la música.)

Rudy Rucker, en *Infinity and the Mind* [El infinito y la mente] (Rucker 82, p. 162), da una versión no matemática del procedimiento de Gödel en forma de una interacción hipotética entre Gödel y una máquina, una Máquina de la Verdad Universal (MVU o, por sus siglas en inglés, UTM), capaz de contestar correctamente cualquier pregunta que se le haga:

1. Alguien presenta a Gödel a MVU, máquina que, se supone, es una Máquina de la Verdad Universal, capaz de responder correctamente cualquier pregunta.
2. Gödel pide el programa y los diagramas del circuito de la MVU. El programa puede ser complicado pero sólo de longitud finita. Llámese al programa *P(MVU)*, que significa *Programa de la Máquina de la Verdad Universal*.
3. Con una leve sonrisa, Gödel escribe la siguiente proposición: "La máquina construida con fundamento en el programa *P(MVU)* nunca dirá que esta oración es verdadera". Llámese a esta oración *G*, por Gödel. *Nótese que G es equivalente a "MVU nunca dirá que G es verdadera"*.
4. Ahora Gödel se carcajea y le pregunta a *MVU* si *G* es o no es cierta.
5. Si *MVU* dice que *G* es verdadera, entonces "*MVU* nunca dirá que *G* es verdadera" es falsa (pues *G* = "*MVU* nunca dirá que *G* es verdadera"). Consecuentemente, si *MVU* dice que *G* es verdadera, entonces *G* es en realidad falsa, y *MVU* ha hecho una declaración falsa. Así, *MVU* nunca dirá que *G* es verdadera, pues *MVU* sólo emite proposiciones verdaderas.
6. Hemos establecido que *MVU* nunca dirá que *G* es verdadera. Por tanto, "*MVU* nunca dirá que *G* es verdadera" es de hecho una oración verdadera. Por consiguiente *G* es verdadera (ya que *G* = "*MVU nunca dirá que G es verdadera*").
7. "Yo sé una verdad que *MVU* nunca podrá pronunciar", dice Gödel, "Yo sé que G es verdadera. *MVU* no es verdaderamente universal."

Tal vez el lector necesite volver a leer de nuevo esta argumentación, y observar que *G* en realidad es verdadera; sin embargo, *MVU* nunca podrá decirlo. En términos más precisos, *G* es indecidible con respecto a *MVU* y, por lo tanto, *MVU* es incompleta.

En 1933, Gödel dio una serie de conferencias en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, Nueva Jersey. Volvió a Viena con la intención de regresar a Princeton. Sin embargo, sufrió el primero de una racha de colapsos nerviosos, lo que demoró su retorno a Princeton hasta 1935. Poco después de regresar a este instituto sufrió su segundo colapso nervioso. Entonces volvió a Viena y ya no volvió a dar conferencias hasta 1937.

Algunos de sus retratos muestran a Gödel delgado y de aspecto enfermizo. Se sabe que era hipocondriaco, con el temor irracional de envenenarse accidentalmente (y en sus últimos años de modo inten-

cional). A menudo estaba desnutrido y es difícil imaginar cómo pudo haber vivido cuidando de sí mismo. Tuvo la fortuna de conocer a la vienesa Adele Porkert, bailarina de club nocturno, y casarse con ella. Su esposa cuidó de él hasta su muerte, en 1978.

Adele era católica, divorciada y seis años mayor que Gödel. Era, pues, una pareja dispareja. Los padres de Gödel no la aprobaron y sus asociados académicos la consideraron no más que una prostituta. Gödel comprendió que un matrimonio haría peligrar su carrera. Con todo, se casaron en 1938 y la simétrica relación de opuestos perduraría largamente, pues ambos eran muy afectuosos entre sí. Durante los episodios de paranoia de Gödel, cuando creía que alguien trataba de envenenarlo, ella era su probadora de comida.

Poco después de haberse casado, Gödel regresó solo a Estados Unidos, donde impartió clases en el Instituto de Estudios Avanzados y en la Universidad de Notre Dame. Retornó para reunirse con su esposa en Viena, en 1939, y de inmediato fue llamado al servicio militar por las fuerzas armadas nazis. Con la ayuda del Instituto de Estudios Avanzados pudo conseguir visas de salida para él y su esposa. Los dos llegaron a Princeton en 1940 y Gödel nunca volvió a salir de Estados Unidos.

En *The Consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum Hipothesis with the Axioms of Set Theory* [La consistencia del Axioma de elección y la Hipótesis del continuo generalizada con los axiomas de la teoría de conjuntos] (1940), Gödel logró demostrar que el axioma de elección era consistente con el sistema de axiomas ZF; es decir, con añadir el axioma al sistema ZF (ZF + C = ZFC) no se producían contradicciones. Lo anterior equivale a decir que el axioma de elección no se puede refutar. Hizo lo mismo con la hipótesis del continuo, dejando abierta, pues, la posibilidad de su independencia del sistema axiomático ZF. Para establecer la independencia, se requeriría demostrar que el axioma de elección y la hipótesis del continuo no podrían deducirse de los otros axiomas ZF. Trató de hacerlo, pero sus esfuerzos fueron infructuosos. Hacía falta el trabajo de Paul Cohen de la Universidad de Stanford para imprimir una sensación de cierre a estas preguntas abiertas.

Hay muchas anécdotas sobre la idiosincrasia de Gödel. Una de ellas es la de su solicitud de la ciudadanía norteamericana en 1948. Al prepararse para el examen de ciudadano, revisó detalladamente la Constitución de los Estados Unidos. La víspera del examen y la entrevista, Gödel descubrió lo que percibió como una deficiencia o inconsistencia de la Constitución, la cual, teóricamente, permitía que los Estados Unidos se transformaran en una dictadura. Emocionado con su descubrimiento,

se comunicó con su amigo, el notable economista Oskar Morganstern, y se lo participó. Morganstern y Albert Einstein iban a fungir como testigos de Gödel en la entrevista programada y ambos se preocuparon de que éste actuara en contra de sí mismo sacando a relucir su descubrimiento en la entrevista. Lo previnieron para que no echara todo a perder.

Al día siguiente, Einstein, Morgenstern y Gödel llegaron en auto al tribunal federal de Trenton para el examen y la entrevista programados. Camino al tribunal, Einstein y Morgenstern hicieron cuanto pudieron por que Gödel se concentrara en el examen y en la entrevista, tratando de impedirle divagar. En el momento de prestar juramento, el juez le pidió su opinión sobre la Constitución del país. Gödel no pudo contenerse más y pronunció un discurso sobre las inconsistencias de la Carta Magna. Hay informes de que fueron necesarios los esfuerzos de los tres –Morganstern, Einstein y el juez– para calmar a Gödel y lograr que terminara la entrevista. Gödel pasó el examen y le fue concedida la ciudadanía norteamericana.

Gödel y Einstein eran amigos íntimos en el IEA. Se cuenta que Gödel, contemplando una fotografía del general MacArthur en la primera página del *New York Times*, le dijo a Einstein que la foto impresa en el periódico era la de un impostor. Al pedírsele que explicara por qué, le dijo a Einstein que él tenía una fotografía más antigua del general; y que la razón de la longitud de la nariz a la distancia de la punta de la nariz a la de la barbilla ¡diferían en ambas fotografías!

Gödel era un solitario y notable por no programar sus citas. Cuando le preguntaron por qué se molestaba en hacer citas que no tenía intención de cumplir, replicó que era su modo de garantizar que no tendría que encontrarse con su visitante.

En 1958 Gödel publicó su último artículo, después de que se había puesto cada vez más enfermo, tanto mental como físicamente. Su esposa Adele sufrió una apoplejía que la debilitó y su buen amigo Oskar Morganstern murió de cáncer. El 14 de enero de 1978 Gödel murió en el Hospital de Princeton, de "desnutrición" e inanición (agotamiento y falta general de fuerza), causadas por "perturbaciones de su personalidad". Su médico, el Dr. Ramona, estableció (Caste y DePauli 00, p. 92) que Gödel "había rechazado todo alimento. Nunca había comido mucho; al morir pesaba apenas unos 27 kg. Murió en posición fetal". Efectivamente: se dejó morir de hambre.

Aunque publicó menos artículos que otros grandes matemáticos, salvo Bernhard Riemann, se considera que la obra de Gödel revolucionó

la lógica y los fundamentos de las matemáticas. Se le describe como uno de los más grandes matemáticos platónicos, como lo muestran estos comentarios sobre los conjuntos matemáticos (Barrow 92, p. 26):

> ... a pesar de la distancia de la experiencia sensorial, tenemos algo así como una percepción también de los objetos de la teoría de conjuntos, como se ve en el hecho de que los axiomas se imponen sobre nosotros como verdaderos. No veo ninguna razón para que tengamos menos confianza en esta clase de percepción, es decir, en la intuición matemática, que en la percepción sensorial, que nos induce a construir teorías físicas y a esperar que las percepciones sensoriales futuras concordarán con aquéllas y, además, a creer que una cuestión no decidible ahora tiene significado y puede ser decidida en el futuro. Las paradojas teóricas de los conjuntos son apenas más problemáticas para las matemáticas que los engaños de los sentidos para la física.

En 1965, Oskar Morganstern escribió al Ministro del Exterior de Austria, Bruno Kreisky (Casti y DePauli 00, p. 3):

> No hay absolutamente ninguna duda de que Gödel es el lógico vivo más grande del mundo [...] Einstein me dijo una vez que su propio trabajo no significaba gran cosa para él, y que sólo asistía al Instituto para tener el privilegio de caminar a casa al lado de Gödel.

PAUL COHEN. LA INDEPENDENCIA DEL AXIOMA DE ELECCIÓN

El matemático norteamericano Paul Cohen (véase figura 1.13) se distinguió por resolver el problema número uno de la famosa lista de Hilbert de veintitrés problemas no solucionados. Al hacerlo, esclareció los pendientes asociados con la Hipótesis del continuo de Cantor y el Axioma de elección de Zermelo. Como la demostración del teorema de Banach-Tarski depende del axioma de elección, Paul Cohen estará en el acto final de nuestra historia del teorema indicado. Cohen ha merecido dos de las más prestigiadas recompensas en el campo de las matemáticas: la Medalla Fields y el Premio Böcher.

Nacido el 2 de abril de 1934 en Long Branch, Nueva Jersey, Cohen creció en Brooklyn y fue el menor de los cuatro hijos que tuvieron sus padres, inmigrantes judíos. Se interesó por las matemáticas a los nueve años de edad, cuando su hermana mayor, Sylvia, le enseñó un problema de su libro de álgebra. Empezó a ir a la Biblioteca Pública de

Brooklyn a leer todos los libros de matemáticas que tuvo a su alcance. A los diez años de edad resolvía ecuaciones cuadráticas y cúbicas y había empezado a leer libros sobre teoría de las ecuaciones.

Teniendo tanto talento para las matemáticas a tan corta edad le fue difícil encontrar ayuda para sus interrogantes sobre la materia. En la biblioteca no permitían que los niños hojeasen los libros para adultos. Por eso se las arregló para introducirse furtivamente en la sección de matemáticas. Y nadie le pidió cuentas. Cohen (Albers *et al.*, pp. 45-46) lo describe así:

> A ninguno de mis familiares podía pedirle esa clase de ayuda. No me desalentaban, pero no sabían qué hacer conmigo. Había en el vecindario algunas personas que estudiaban ingeniería o ciencias, las cuales me dieron algunos libros cuando se enteraron de que yo leía matemáticas por gusto. Y Sylvia siguió trayéndome libros de la biblioteca de la universidad...
>
> En resumen, cuando estaba en sexto grado sabía bastante bien álgebra y geometría. Conocía los rudimentos del cálculo y tenía una barnizada de teoría de los números, que me gustaba mucho. Abundan los profesores que se sienten amenazados cuando se topan con un niño que estudia cuestiones avanzadas. Y en esa época era yo renuente a conversar con los demás niños sobre mis intereses matemáticos, porque presentía que me verían como alguien raro.

En la Stuyvesant High School, del bajo Manhattan, Cohen se encontró con estudiantes con intereses semejantes a los suyos. Stuyvesant era una de las varias escuelas de la zona especializadas en ciencias y matemáticas; fue cuando el aislamiento que antes sentía se volvió crónico.

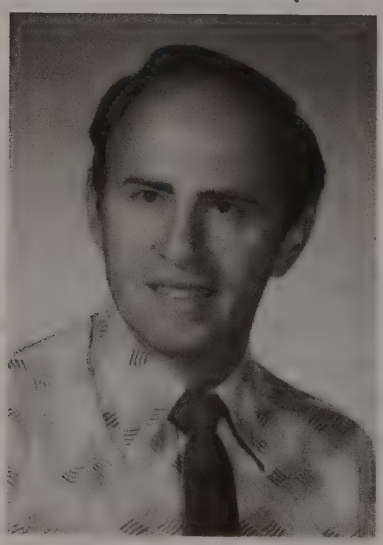


Figura 1.13. Paul Cohen (1934-).
(Cortesía de Paul J. Cohen.)

Fue en esa escuela donde decidió hacerse matemático. Considerando la situación financiera de su familia, Cohen se inscribió en una universidad local, el Brooklyn College, de 1950 a 1953. Algunos de sus amigos de preparatoria habían entrado a la Universidad de Chicago. Le insistían que solicitara su inscripción allá; lo hizo y fue aceptado. Cohen recuerda *(idem)* que:

> Ahí estudié seriamente [en el Brooklyn College] pero me aburría [...] Tampoco disfrutaba la rutina de todos los cursos obligatorios. Lo que realmente deseaba era hacer matemáticas [...] [La Universidad de Chicago] era un lugar emocionante e innovador en esa época y aceptaba, para que hicieran su posgrado, estudiantes con sólo dos años de universidad [...] Uno de mis primeros recuerdos de Chicago fue caminar por el corredor de Eckhart Hall y oírlo [a Irving Kaplansky] decir que acababa de demostrar que cada álgebra B* es un álgebra C* –estaba repartiendo en el vestíbulo hojas mimeografiadas–. Me dije: "Oye, ¿sabes que aquí es donde se están haciendo las matemáticas? ¡Un álgebra B* es un álgebra C*!" Luego me pregunté "¿Y qué es un álgebra B*?" Así fue como supe que estaba en una escuela excelente.

En Chicago obtuvo su maestría en ciencias en 1954 y en 1958 su doctorado, con la tesis *Topics in the Theory of Uniqueness of Trigonometric Series* [Temas de la teoría de la unicidad de las series trigonométricas]. Antes de obtener el doctorado, trabajó como profesor en la Universidad de Rochester. Fue durante estos años que pasó en Chicago, mientras trabajaba en un problema de teoría de los números, que consideró por primera vez el Teorema de la incompletitud, de Gödel. Desde su infancia Cohen se había interesado por la teoría de los números y en sus años de Chicago se proponía resolver un problema de esta rama. No lo logró. Un estudiante de posgrado le dijo a Cohen: "Ciertamente no puedes obtener un procedimiento de decisión ni siquiera para esa clase limitada de problemas, porque entrarías en contradicción con el teorema de Gödel". Cohen leyó el teorema. Al principio lo encontró más filosófico que matemático. Pronto se percató de que el teorema de Gödel sí se aplicaba al problema que estaba estudiando. Aunque convencido de la aplicabilidad del teorema, no le interesó.

Con respecto al primer problema de Hilbert, el de la hipótesis del continuo de Cantor y el axioma de elección, Cohen recuerda (*ibidem*, p. 51):

> Recuerdo que estaba en la biblioteca de Chicago, examinando una lista de problemas famosos –quizá hasta la lista de Hilbert–. Incluía el problema

de la Hipótesis del continuo, y me dije: "Ese es un problema que en realidad no entiendo". Me pregunté qué significaría resolverlo. Tenía la sensación de que en realidad no era un problema en el mismo sentido que otros problemas matemáticos, pero pensé que definitivamente me interesaba.

Después de lograr su doctorado, Cohen pasó un año en el Instituto Tecnológico de Massachussets, y luego dos años como investigador en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Es curioso que no haya indicios de que se haya encontrado con Gödel, que trabajaba ahí también. En 1961 pasó a formar parte del personal docente de la Universidad de Stanford, donde permanece hasta hoy,[5] interesado en el análisis armónico, las ecuaciones diferenciales y la teoría de conjuntos.

Mientras estuvo en Stanford, Cohen continuó la obra de Gödel, demostrando que la hipótesis del continuo y el axioma de elección son independientes de los axiomas ZF de la teoría de conjuntos. Gödel había hecho parte del trabajo, demostrando que si el sistema ZF es consistente sin la hipótesis del continuo, entonces el sistema conservaría su consistencia agregándole esta hipótesis. Hizo lo mismo con el axioma de elección. Gödel había demostrado así que la hipótesis del continuo y el axioma de elección no podían ser refutados. Gödel se esforzó, sin éxito, por demostrar que la hipótesis del continuo y el axioma de elección no podían derivarse del sistema ZF. Si alguien pudiera hacerlo, entonces ambas cuestiones hasta el momento sin solución serían declaradas indecidibles.

Solomon Feferman, profesor de matemáticas y filosofía de la Universidad de Stanford, fue quien sugirió a Cohen que le echara un vistazo a estos problemas. Al principio, Cohen sentía que el problema no estaba bien planteado y que tenía uno "que estar algo loco tan sólo para plantear el problema" (*ibidem*, p. 529).

Se puede especular sobre si estar *algo* loco será una condición previa o una consecuencia de trabajar en este problema. Georg Cantor pasó sus últimos años en una institución para enfermos mentales en Halle, sufriendo la depresión consiguiente a la muerte de su hijo más pequeño, frustrado por su incapacidad de resolver la hipótesis del continuo y sus continuas batallas contra Leopold Kronecker. Ernst Zermelo, conocido por haber formalizado la teoría de conjuntos y por el axioma de elección, había padecido cuando menos un colapso mental. Y las luchas de

---

[5] Paul Cohen murió el 23 de marzo de 2007. (T.)

Kurt Gödel contra la depresión y la paranoia lo enviaron a lo profundo de enfermedades como la de Cantor. ¿Están relacionados la naturaleza de su trabajo y sus enfermedades mentales?

Cohen estaba más interesado en resolver el axioma de elección que en la hipótesis del continuo, simplemente porque creía que era más importante. Juzgaba que la hipótesis del continuo era más bien de interés filosófico, mientras que el axioma de elección se usaba más en demostraciones. Trabajó en ambos problemas, haciendo algunos progresos, pero terminó frustrado y en 1962 interrumpió sus intentos por espacio de varios meses. Mientras viajaba por carretera por el suroeste de Estados Unidos, acompañado de su futura esposa, empezó a pensar de nuevo en el problema y terminó por convencerse de que sí se podía resolver.

En abril de 1963 Cohen estaba persuadido de que tenía una solución. Había inventado la técnica a la que llamó *forzar (forcing)*, mediante la cual ciertos modelos teóricos de conjuntos podían extenderse de modo tal que una proposición dada (o la negación de una proposición) se volviera verdadera (fuera forzada a ser verdadera) en el modelo extendido. Con esta técnica, Cohen demostró que el sistema ZF seguiría siendo consistente aunque el axioma de elección y la hipótesis del continuo no se sostuvieran. Dicho de otro modo, demostró que el axioma de elección y la hipótesis del continuo no podían deducirse de los axiomas ZF. Esa demostración, aunada a los resultados de Gödel, estableció la independencia (indecibilidad) de estos problemas dentro de este sistema axiomático. La técnica era tan nueva como potente y pareció como si muchas de las cuestiones no resueltas de la teoría de conjuntos se podrían solucionar con este método. Con extrema y entendible emoción había llevado a Princeton un borrador de su trabajo a Gödel.

En junio de ese año Cohen recibió la respuesta de Gödel, quien le escribió (Yandell 02, p. 78): "Espero que no se halle usted bajo alguna tensión nerviosa que obstaculice su trabajo. Ha logrado el progreso más importante en teoría de conjuntos desde que fue axiomatizada. Tiene usted, pues, todas las razones del mundo para estar de buen humor".

El campus de Stanford se halla a sólo 90 km del campus de Berkeley de la Universidad de California. Alfred Tarski y los demás lógicos de Berkeley se enteraron de la hazaña de Cohen, aun antes de que su artículo fuera publicado. Tarski *(ibidem*, p. 58) comentó: "Tienen un método nuevo y conseguirán todo".

Cohen describe así su propia demostración *(idem)*:

> Podría decirse, humorísticamente, que la actitud hacia mi demostración fue la siguiente. Cuando la presenté por primera vez, algunos pensaron que estaba equivocada. Luego, que era extremadamente complicada. Después, que era fácil. Pero desde luego es fácil, en el sentido de que hay una idea filosófica clara. Tenía puntos técnicos, ¿sabe?, que me molestaban, pero en lo fundamental no era en realidad un enorme problema combinatorio: era una idea filosófica.

Gödel escribió la indecibilidad de la hipótesis del continuo dejando ver claramente su interpretación platónica (Barrow 92, p. 264):

> Sólo alguien que niegue que los conceptos y los axiomas de la teoría de conjuntos clásica tienen algún significado [...] quedaría satisfecho con tal solución, pero no alguien que crea que ellos describen alguna realidad bien determinada. Pues en realidad la conjetura de Cantor debe ser o verdadera o falsa, y su indecibilidad de los axiomas como hoy se conocen sólo puede significar que no contienen una descripción completa de la realidad.

Cohen piensa de otro modo (Albers *et al.*, p. 54):

> Bien, filosóficamente, si cree usted que los conjuntos existen realmente –quiero decir, si adopta usted la posición platónica extrema– puede preguntar: ¿cuál es la respuesta? Ciertamente el propio Gödel tuvo la visión platónica de que la pregunta exigía una respuesta absoluta y que, por tanto, ni su prueba de la consistencia de la Hipótesis del continuo con los axiomas de la teoría de conjuntos, ni la mía, de su independencia de ellos, era la respuesta final. Mi punto de vista es que considero satisfactoria la solución presente del problema. Pienso que es la única solución posible. Da la sensación de lo que es imposible, y es ahí donde percibo que debe uno estar muy satisfecho. Hay más problemas, pero son enteramente técnicos. Si me gustara apostar, apostaría a que nadie va a venir con otra clase de solución. Habrá artículos filosóficos, pero yo no pienso que algún artículo matemático dirá que hay otra respuesta aparte de la de que es indecidible.

Posteriormente el método de Cohen fue modificado y aplicado a problemas ajenos a la teoría de conjuntos, como las gráficas infinitas, la teoría de la medida y los juegos infinitos. Cohen recibió la Medalla Fields en el Congreso Internacional de Matemáticos, realizado en Moscú en 1966, por su trabajo específico en los fundamentos de la teoría de conjuntos. La medalla Fields, así llamada por el matemático canadiense Charles Fields,

es considerada a veces el premio Nobel de matemáticas. Dado que con esta medalla se pretende dar reconocimiento y apoyo a matemáticos que tienen el potencial de obtener un logro futuro, sólo se concede a matemáticos menores de cuarenta años. En el caso de Cohen, fue la primera y única vez que se otorgó por trabajar en lógica y fundamentos.

La demostración del teorema de Banach-Tarski, dentro del sistema ZFC, se cifra en el axioma de elección. Entonces, ¿es cierto el teorema de Banach-Tarski? Lo es, si suponemos que el axioma de elección es cierto. Pero ¿es verdadero el axioma de elección? Tal vez; pero debemos aceptar el hecho de que no podemos decidir con base en el sistema ZFC. Véase como se vea, ¡es asunto de elección!

Acaso parezca que las obras de Gödel y Cohen tendientes a demostrar las limitaciones inherentes a tales sistemas axiomáticos obstaculizan el desarrollo de las matemáticas, al exponer barricadas preexistentes en el camino al descubrimiento. Todo lo contrario: en realidad esclarecieron de modo inesperado la teoría de conjuntos y abrieron nuevas sendas que explorar. Para entender mejor el porqué, examinemos la geometría de Euclides y el asunto de su *quinto postulado*. En fecha alrededor del año 300 a. C. Euclides axiomatizó la geometría estableciendo un conjunto de postulados (axiomas) a partir de los cuales se podían demostrar, como teoremas, otras muchas propiedades. Acaso fue éste un intento por resolver las paradojas de Zenón, al igual que la axiomatización de Zermelo fue un intento por resolver las paradojas de la teoría de conjuntos. El llamado *quinto postulado* o *axioma de las paralelas* establece que por un punto dado se puede trazar una y sólo una paralela a una recta dada.[6] ¡Parece razonable! El problema con este axioma es que no hay forma de verificarlo; no es evidente, no salta a la vista su verdad. Las paralelas, que se prolongan indefinidamente, no se pueden observar directamente. Hay que aceptar el axioma como acto de fe, igual que se acepta el axioma de elección.

Los matemáticos del siglo XIX Carl Friedrich Gauss, Johann Bolyai y Nicolás Lovachevsky trabajaron independientemente en la posibilidad

---

[6] Además de haber sido confrontado desde su divulgación, por Proclo (410-485 d. C.) por ejemplo, la versión del postulado que aquí se presenta se atribuye, bien a Ptolomeo: "Por un punto exterior a una recta sólo cabe trazar una paralela", bien, con más frecuencia, al matemático escocés John Playfair (1748-1819). La versión original de Euclides, tal y como aparece en sus *Elementos*, dice que "si un segmento de recta corta dos líneas rectas que formen del mismo lado con la primera dos ángulos internos cuya suma sea menor que dos ángulos rectos, entonces las dos líneas, si se prolongan indefinidamente, se encontrarán del lado en que la suma es menor que dos rectos". (T.)

de encontrar o crear *geometrías no euclidianas,* a las cuales no se aplicara el postulado de las paralelas. En 1840, Lovachevsky fue el primero en publicar una geometría no euclidiana sistemática –la geometría de Lovachevsky–.[7] Bernard Riemann (1826-1866) propuso una gran variedad de geometrías no euclidianas, conocidas como *geometrías riemannianas.* Cuando se propusieron las geometrías no euclidianas, surgieron dos preguntas. Primera: ¿podía haber una geometría no euclidiana consistente? O sea, ¿podría ser consistente y no conducir a contradicciones un sistema de axiomas sin el postulado de las paralelas tal y como lo enunció Euclides? En caso positivo, ¿se podría aplicar a algo la geometría no euclidiana? La razón de la segunda pregunta debiera ser clara para el lector no familiarizado con las geometrías no euclidianas. La geometría euclidiana que se aprende en la secundaria puede ostentarse como la única geometría de la realidad física. ¿Podría alguna otra geometría describir con exactitud nuestro universo? ¿Por qué no? La geometría euclidiana del plano puede no ser la mejor geometría para describir las superficies curvas, como la de la tierra. Si se pone uno a pensar en ello, ¿es una superficie curva, como la de la Tierra, algo menos natural que una superficie plana, como la que trató Euclides?

La primera demostración de la consistencia de una geometría no euclidiana la hizo Eugenio Beltrami (1835-1900), cuando en 1869 demostró que las geometrías no euclidianas de Lobachevsky y de Bolyai eran consistentes. En cuanto se demostró que el postulado de las paralelas era independiente de los demás postulados de la geometría euclidiana, se estimuló la creación de otras geometrías –geometrías no euclidianas que, por definición, no contenían el postulado de las paralelas–. Entonces se dispuso de todo un arsenal de geometrías con las cuales resolver problemas matemáticos o físicos. En 1915, Einstein basó su teoría de la gravitación en el supuesto de una descripción geométrica no euclidiana del universo.

Hoy hay muchas clases de geometrías no euclidianas, cada una de ellas consistente y aplicable a un tipo específico de problema. La *geometría esférica (riemanniana)* es una geometría no euclidiana definida sobre la superficie de una esfera, donde las líneas rectas son círculos máximos y la distancia entre dos puntos de la esfera se mide sobre un arco del círculo máximo que une los dos puntos. El postulado de las paralelas no se aplica porque no hay líneas paralelas. En la *geometría de taxis* las

---

[7] Véase Nicolai I. Lobachevski, *Pangeometría,* UNAM, México, 1987. (T.)

distancias se miden como las sumas de las distancias horizontal y vertical a lo largo de una retícula superpuesta al espacio, y es tan divertida como útil. El apéndice de este capítulo contiene un modelo del teorema de Banach-Tarski en una *geometría hiperbólica* (no euclidiana), dentro de la cual no hace falta el axioma de elección para producir la paradoja.

Del mismo modo, la independencia del axioma de elección permite elegir sistemas de axiomas para la teoría de conjuntos. Se están desarrollando sistemas axiomáticos sin el axioma de elección, conocidos como sistemas no estándar o no cantorianos. Si Hilbert *dirigió* con su famosa lista de veintitrés problemas no resueltos, y Gödel *corrigió* haciendo que las matemáticas se ajustaran a sí mismas autorreferencialmente, entonces Cohen *re-dirigió* regalándole a las matemáticas del siglo XX una nueva y potente herramienta en la forma de su procedimiento de *forzar*. Con la independencia debe llegar una sensación de libertad y optimismo para los matemáticos del siglo XXI. Como dijo Cantor: "La esencia de las matemáticas reside en su libertad".

APÉNDICE

Ejemplos de autorreferencia en la física, la pintura y la música

Werner Heisenberg (1901-1976), premio Nobel de física de 1932, nos legó una interesante analogía con el teorema de Gödel. En 1927, como parte de la teoría de la mecánica cuántica, formuló el *Principio de incertidumbre*, el cual afirma que es imposible medir simultáneamente la posición y la cantidad de movimiento de un objeto físico, sin importar la precisión de los instrumentos empleados para hacer las mediciones.

Para ver la equivalencia con el teorema de Gödel, debemos retroceder a los principios del siglo XX, a la época en que el científico francés Pierre-Simon, marqués de Laplace (1749-1827), propuso la doctrina del *determinismo científico*. La idea era que el futuro del universo sería, teóricamente, por completo predecible con tal que conociéramos el estado total y exacto del universo en un momento dado. Por ejemplo, si supiéramos la posición y la cantidad de movimiento exactas del Sol y los planetas de nuestro sistema solar en cierto instante, entonces podrían utilizarse las matemáticas de la mecánica de Newton para predecir, con precisión absoluta, la naturaleza exacta del sistema solar en cualquier momento especificado del futuro. Era mecánica pura, como predecir las posiciones futuras de unas bolas de billar en una mesa, dadas sus posiciones y sus velocidades actuales. Laplace llegó hasta el punto de sugerir que leyes similares gobernaban el comportamiento humano,

dando así razones para refutar la existencia del libre albedrío. Quienes creían en la capacidad de Dios para intervenir y en el libre albedrío del individuo objetaron la doctrina determinista.

Heisenberg hizo notar que para predecir la posición futura de, digamos, una partícula subatómica, tendrían que medirse con perfecta exactitud su posición y velocidad presentes. Pero al hacerlo, se perturbaría la propia partícula, provocándose la dificultad autorreferencial de *medir los efectos de la medición*. Por ejemplo, para medir con precisión la posición sería necesaria luz de onda corta (es decir, de gran energía), que alteraría de modo significativo la velocidad. Es casi como "robarle a Fidel para pagarle a Felipe". Del mismo modo, para medir con exactitud la velocidad, se debe sacrificar la precisión del cálculo de la posición. La misma clase de problema se presenta al realizar encuestas de opinión. ¿Es posible pedir con precisión la opinión de una persona sin afectar de uno u otro modo su respuesta?

Cuando Heisenberg introdujo su principio se topó con algunas objeciones pues parecía contradecir las leyes fundamentales de causa y efecto. El principio de incertidumbre de Heisenberg, junto con la mecánica cuántica, fue el golpe mortal al determinismo científico, pues no se podría predecir el estado futuro de un sistema si no había esperanza de hacer mediciones precisas del estado actual del mismo.

El teorema de Gödel hizo por las matemáticas lo que el principio de incertidumbre de Heisenberg por la física. Antes del teorema de Gödel, de 1931, el movimiento formalista de las matemáticas, encabezado por David Hilbert, propuso que todas las matemáticas debían establecerse algorítmicamente de modo consistente y completo, reduciendo así a las matemáticas a un sistema mecánico y determinista.

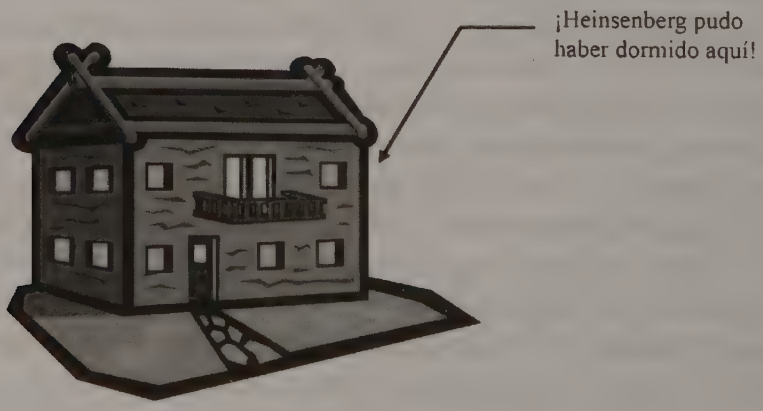


Figura 1.14. Atracción al borde del camino.

En la conferencia que dio en el Congreso de Matemáticas de 1900, Hilbert declaró (Yandell 02, p. 395):

> Por ariscos que estos problemas nos parezcan y por inermes que nos encontremos frente a ellos, tenemos la convicción firme de que su solución debe seguir un número finito de procesos puramente lógicos [...] Esta convicción de que todo problema de matemáticas tiene solución es un incentivo poderoso para el investigador. Oímos dentro de nosotros la perpetua llamada: allí está el problema. Busca la solución. Puedes encontrarla por puro razonamiento, pues en matemáticas no hay *ignorabimus*.

El teorema de Gödel conmocionó la visión de Hilbert.

En el arte de la pintura se dejaron ver también las paradojas. El artista holandés Mauritus C. Escher (1898-1972) captura el concepto en varias obras que han adquirido gran fama. La litografía *Tres esferas II* (1946) describe tres esferas. La que está en medio refleja a las otras dos, así como al pintor dibujando las tres. En la litografía *Drawing Hands (Dibujando manos,* 1948) muestra un par de manos, la derecha dibujando la izquierda, que dibuja la derecha dibujando la izquierda... *Print Gallery* (1956) es una litografía detallada de un hombre joven que mira dos impresiones en una pared, una de las cuales muestra a una mujer mirando por la ventana el techo del lugar donde está instalada la galería. Así que el joven observa la pintura de la cual es sujeto. La realidad y la imagen son una y la misma cosa (véase figura 1.15).

Figura 1.15. Print Gallery, de M. C. Escher. © The M. C. Escher Company — Baarn — Holanda. Reservados todos los derechos.

Johann Sebastian Bach muestra temas autorreferenciales en sus cánones y fugas. En la última línea de *El arte de la fuga* codifica su propio apellido B-A-C-H (véase figura 1.16). (En alemán, el *si natural* [B en inglés] se designa con la letra H.)

Por desgracia, ésta fue la última obra que escribió antes de morir.

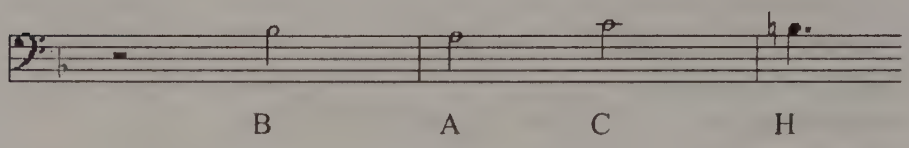


Figura 1.16. Última línea de *El arte de la fuga*, de Bach.

Douglas R. Hofstadter, en su libro *Gödel, Escher, Bach: un eterno y grácil bucle*, ganador del premio Pulitzer de 1980, se refiere a tales fenómenos autorreferenciales como *lazos extraños*. Según Hofstadter (Hofstadter 79, pp. P–2 - P–3):

> ... en la noción de lazo extraño está la clave para desenredar el misterio de lo que nosotros, seres conscientes, llamamos "ser" o "consciencia" [...] El extraño lazo gödeliano que se presenta en los sistemas formales de las matemáticas (es decir, las colecciones de reglas para producir una serie interminable de verdades matemáticas con sólo empalmar símbolos mecánicamente, sin que importen los significados ni las ideas escondidas detrás de las formas que se están manipulando) es un lazo que permite que tal sistema *se perciba a sí mismo*, para hablar de sí mismo, para ganar *conciencia de sí mismo* y, en cierto sentido, no sería ir demasiado lejos el decir que, en virtud de poseer tal lazo, un sistema formal *se adquiere a sí mismo*.

Modelo no euclidiano de la paradoja de Banach-Tarski

La paradoja de Banach-Tarski no se sostiene en el plano; requiere de un espacio de tres o más dimensiones. Sin embargo, Stan Wagon y Jan Mycielski nos ofrecen una interpretación geométrica de la paradoja de Banach-Tarski (o, más exactamente, la paradoja de Hausdorff) en el espacio hiperbólico –no euclidiano– (Wagon 93a). Los conjuntos son construibles y se pueden "ver" en el plano hiperbólico. Y lo que es aún más sorprendente, sale sobrando el axioma de elección.

Wagon y Mycielski emplean el modelo de *disco de Poincaré* del plano hiperbólico. Los puntos del plano están representados por los puntos interiores de un disco. La frontera circular del disco representa *puntos en el infinito*. Las líneas rectas son o diámetros que pasan por el centro del disco o arcos de círculo que interceptan la frontera circular en ángulos rectos. Vemos el plano hiperbólico desde dos puntos de vista diferentes o *claraboyas* (Dewdney 89, p. 117). En la figura 1.17 se ve el plano hiperbólico dividido en *regiones triangulares*, que pueden agruparse para formar tres subconjuntos del plano hiperbólico: A, B y C (véase figura 1.17).

Considérese primero la región A del disco. Si se hace girar el disco 120° en el sentido de las manecillas del reloj, entonces A coincidirá exactamente con B. Si se hace girar al disco otros 120°, entonces A coincidirá con C. Así, pues, visto a través de la claraboya, las tres piezas son congruentes, y cada una de ellas constituye la tercera parte del espacio hiperbólico.

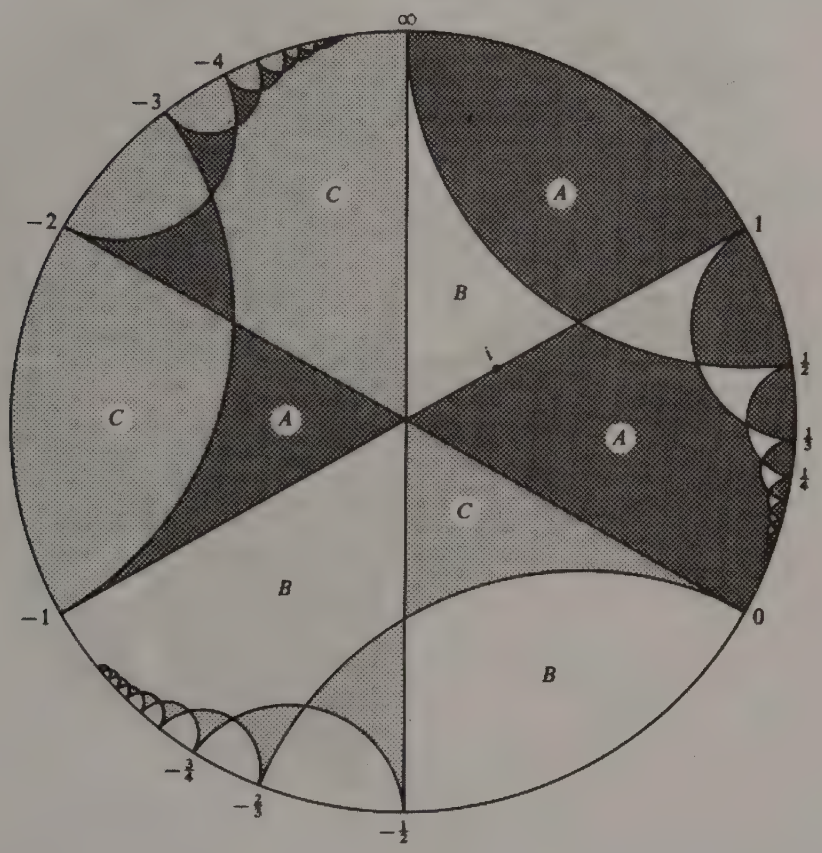


Figura 1.17. El modelo de disco del plano hiperbólico de Poincaré. La región A (gris oscuro) es 1/3 de la totalidad del espacio [Wagon 85, figura 5.2(a)]. (Reimpresa con autorización de la Cambridge University Press.)

Pero veamos ahora la figura 1.18 que contiene el mismo espacio hiperbólico pero visto a través de una claraboya diferente, centrada en el punto *i*. La misma región A (gris oscuro y de aspecto diferente pues se está viendo de modo diferente) es congruente con las dos otras áreas combinadas. Con una rotación de 180° que se le dé al disco esto se verá con mayor claridad. Así, desde este punto de vista A corresponde a la mitad del espacio.

En resumen, la región A es congruente con un tercio del espacio hiperbólico y con la mitad del mismo espacio, representando una versión bidimensional no euclidiana de la paradoja de Hausdorff. ¡Y esto se logró sin el axioma de elección!

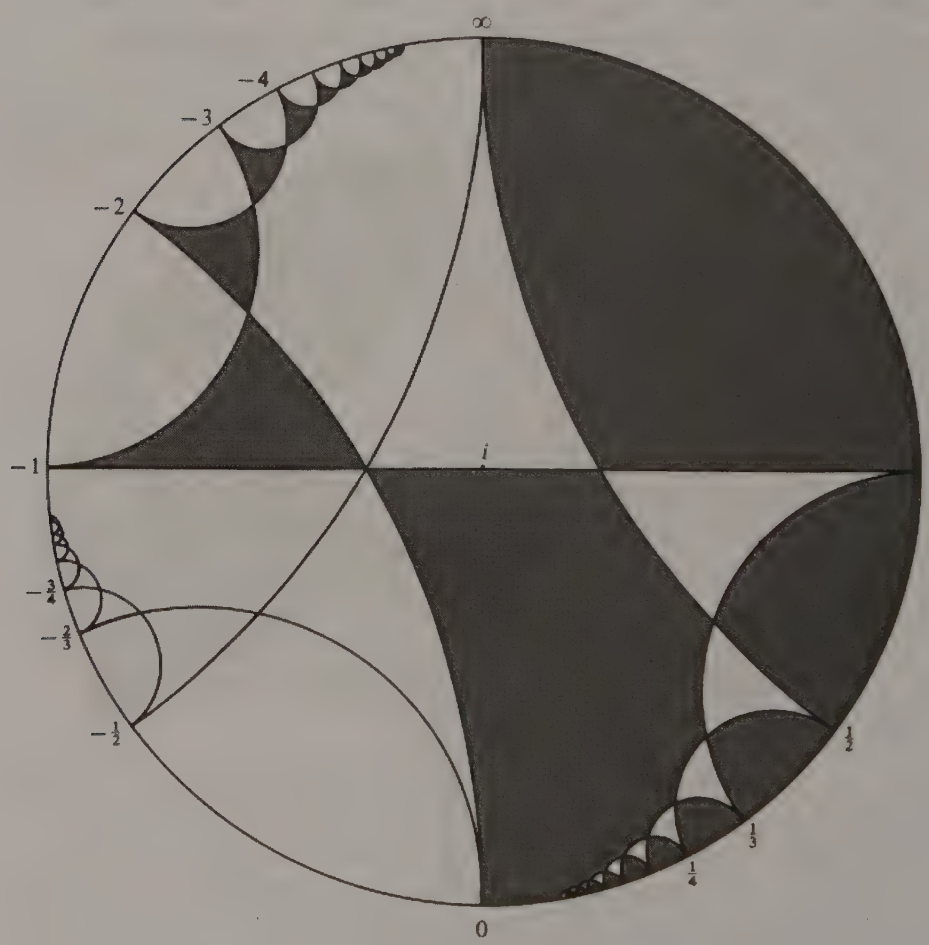


Figura 1.18. Centro del modelo cambiado al punto i. La región A (gris oscuro) es 1/2 del espacio entero [Wagon 85, Figura 5.2(b)]. (Reimpresa con autorización de la Cambridge University Press.)

Además de sus impresiones artísticas de la autorreferencia, Escher utiliza el disco de Poincaré en cuatro de sus obras: *Límite de círculo I*, *Límite de círculo II*, *Límite de círculo III* y *Límite de círculo IV*. En el grabado en madera *Límite de círculo IV* (1960) (véase figura 1.19), los ángeles y los diablos se entrelazan ordenadamente y forman una *teselación*,[8] especie de piso de mosaicos que cubre en su totalidad el disco. Cerca de la circunferencia del disco van volviéndose infinitamente pequeños. El cuadro representa el equilibrio del bien y el mal (el cielo y el infierno) en el mundo.

Figura 1.19. *Círculo límite IV* de M. C. Escher. (© 2004 The M. C. Escher Company-Baarn-Holanda. Reservados todos los derechos.)

[8] Aun cuando las palabras 'teselar' –poner mosaicos– y 'teselación' no las registra aún el *Diccionario de la Real Academia Española*, son términos muy usados en geometría. *Tessellatus* es, en latín tardío, el participio pasado de *tessellare*, cubrir el suelo con *tesserae*, del griego *tessares*, cuatro, lo cual alude posiblemente a que los mosaicos tienen cuatro esquinas. (T.)

En 1993 Stan Wagon sugirió la posibilidad de que el grabado *Límite de círculo IV* podía servir de modelo del teorema de Banach-Tarski de modo similar al modelo de disco de Poincaré, del propio Wagon. Curtis Bennett, actualmente profesor asociado de matemáticas de la Loyola Marymount University, presenta tal modelo en su artículo "A Paradoxical View of Escher's Angels and Devils" (Bennett 00). El artículo, de ocho páginas, publicado en *The Mathematical Intelligencer*, ilustra artísticamente la paradoja empleando dos esquemas en un solo color de la figura pintada por Escher.

.2.

ROMPECABEZAS FALACES Y OTRAS CURIOSIDADES

> Ordené la "cena de dos piezas" en el Pollo Loco pero regresé al mostrador al ver en mi plato una sola pieza de pollo y no dos. Con mucho tacto le hice ver al cajero el error, mostrándole mi nota. El cajero reconoció el error, y regresó el plato al cocinero. Éste se encogió de hombros y de un solo tajo partió en dos la pieza de pollo. Me regresaron el plato sin ningún comentario. Supongo que ¡todo depende de cómo lo vea uno!

Al teorema de Banach-Tarski puede llamársele paradoja de rompecabezas tridimensional, ya que es posible partir una esfera sólida y rearmarla para que forme dos copias de sí misma. También pueden rearmarse las piezas de modo que formen una sola esfera de un tamaño muchas veces mayor que el original. Debe intrigarnos la extraña idea de obtener algo de nada. Invirtiendo el proceso, es igualmente mágico, pues representa un acto de desaparecer un objeto. Cuando esto ocurre frente a nuestros ojos sospechamos alguna clase de engaño, sea en gran escala como en la magia teatral, o sea en el mundo a veces físico a veces teórico de las matemáticas. Es natural que preguntemos: ¿cómo se hace?

PARADOJAS Y ANTINOMIAS

La palabra *paradoja*, que proviene del griego *para* y *doxos*, se traduce literalmente *más allá de la creencia*, es decir, *increíble*.

Nicholas Falletta, en su libro *The Paradoxicon*, dice que una paradoja (Falletta 83, p. xviii) es "una verdad que se para de cabeza para llamar la atención". Con frecuencia la paradoja se refiere, pues, a la apariencia,

que requiere de una explicación. Las cosas se nos antojan paradójicas, quizá porque no las entendemos; quizá por otras razones.

A grandes rasgos, las proposiciones o argumentaciones paradójicas pueden ser de uno de tres tipos:

Tipo 1. Una proposición que parece ser contradictoria, incluso absurda, pero que en realidad puede ser verdadera. (El teorema de Banach-Tarski entra en esta categoría, pues su conclusión parece contradecir el sentido común y, sin embargo, es verdadera. Como preludio al teorema de Banach-Tarski, "los ancestros de la paradoja BT", examinados en el capítulo 4, son también paradojas del tipo 1.)

Tipo 2. Una proposición que parece ser verdadera en realidad puede tener contradicciones internas y, por tanto, ser falsa. Estas son falacias, que resultan del razonamiento falaz.

Tipo 3. Una proposición que puede llevar a conclusiones contradictorias. A ésta se la conoce como falacia.

Sin importar su categoría, hay un elemento sorpresa asociado con la paradoja y el lector puede sentirse apremiado a esclarecerla. En este capítulo se dan ejemplos de los tres tipos, aunque ninguno tan asombroso como el de Banach-Tarski, que se explicará en el capítulo 5.

La paradoja de tipo 1, en realidad una verdad, a menudo se resuelve con información adicional y reconsiderándola. Por ejemplo, existen datos de que las ciudades norteamericanas que tienen mayor número de iglesias tienen también las tasas más altas de homicidios (medidas en homicidios por año). Aunque paradójica, hay una explicación sencilla. El número de iglesias y el número de homicidios son más o menos proporcionales a las poblaciones de las ciudades. Las ciudades grandes son populosas y tienen muchas iglesias: lo opuesto sería cierto de las ciudades pequeñas.

Una fascinante paradoja de tipo 1 es la que inventó Joel Cohen de la Rockefeller University. Usó un aparato de resorte y una cuerda (véase figura 2.1), como modelo de la Paradoja de Braess, fenómeno que se relaciona con el estudio de las redes y las vías de tráfico congestionadas. Se presenta aquí una paradoja física (tipo 1) sin referencia a las redes. Una exposición amplia de la paradoja de Braess se da en el artículo "Camino a la ruina" (Bass y Martin 92), de T. Bass y A. Martin, publicado en la edición de mayo de 1992 del *Discovery Magazine*.

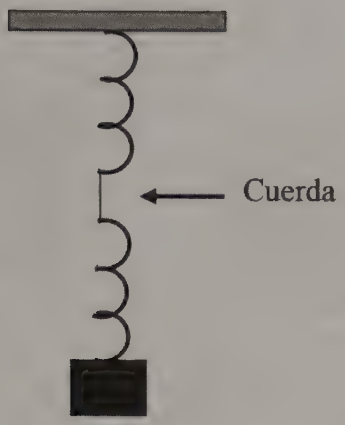


Figura 2.1. Peso colgante.

Se cuelga un peso de un resorte. Luego la parte superior del resorte se ata con una cuerda a la parte inferior de un resorte idéntico al primero. La parte superior del segundo resorte se fija al techo. Es patente que si se corta el pedazo de cuerda el peso caerá.

Para impedir que el peso caiga al piso, imaginémonos que se atan otros dos trozos de cuerda, como se ve en la figura 2.2. Estas piezas son de longitudes iguales pero más largas que el pequeño trozo de cuerda original. Los trozos más largos se dejan flojos, no tensos como el trozo pequeño. (Véase ejemplo a la izquierda de la figura 2.2.)

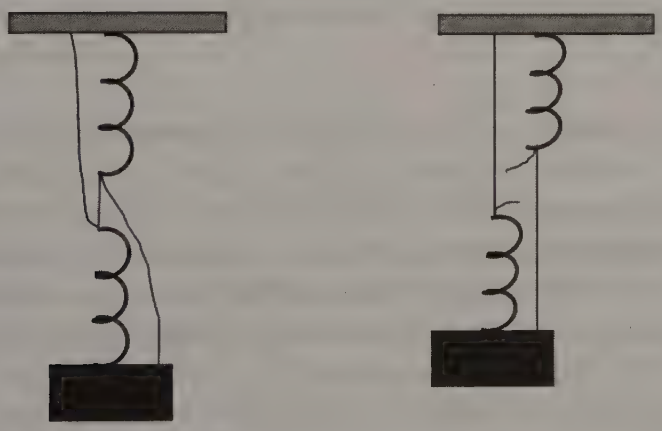
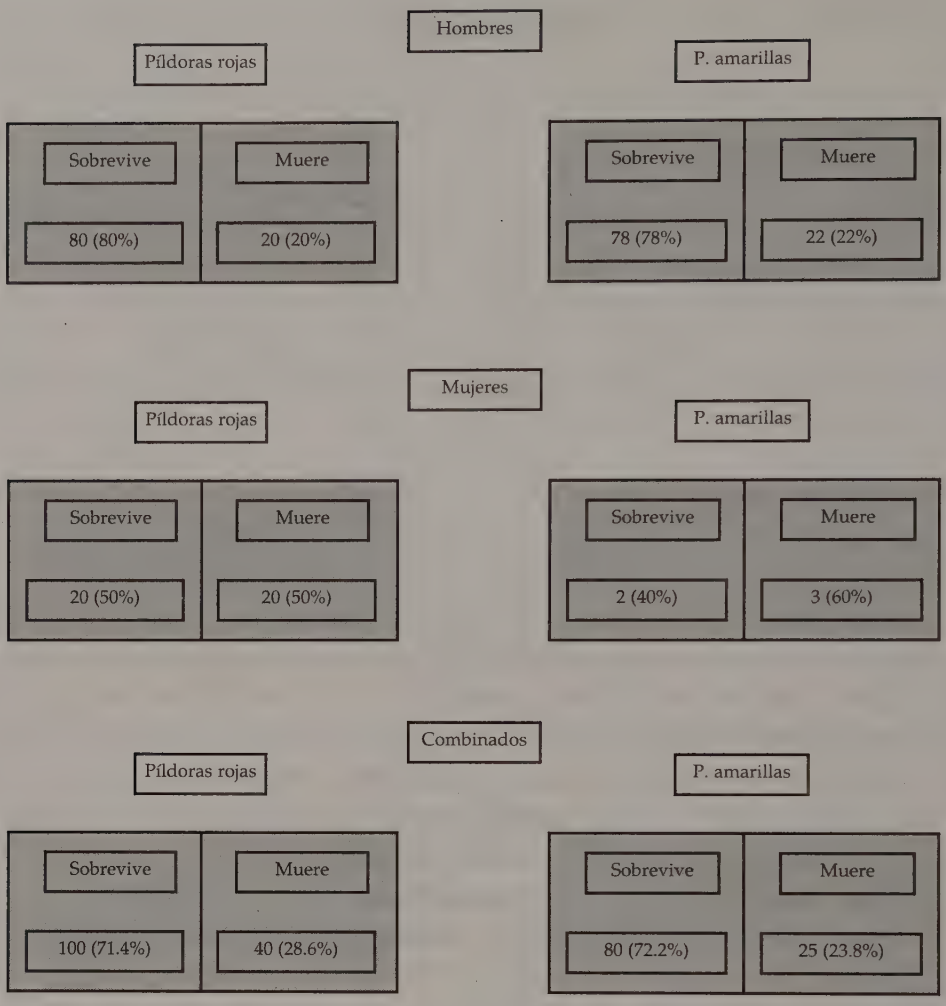


Figura 2.2. Peso colgante con dos cuerdas adicionales –antes y después de cortar la pequeña.



Cuadro 2.1. Ejemplo hipotético de la paradoja de Simpson.

Cuando se corta la cuerda pequeña (véase ejemplo a la derecha de la figura 2.2), sería de esperarse que el peso cayera una pequeña distancia, aunque ciertamente no hasta el piso. Lo notable es que cuando se corta la cuerda pequeña, el peso en realidad se eleva un poco, tal y como se ilustra. Los lectores que lo duden pueden verificarlo construyendo y probando el aparatito. Servirían bien los resortes *Slinky*, disponibles en la mayoría de las tiendas de juguetes.

Pensándolo un poco más, es posible que el lector descubra por qué el dispositivo se comporta así. No se dará aquí una explicación completa. Pero, a manera de pista, nótese que antes del corte los resortes están actuando en serie. Después del corte, lo harán en paralelo.

Los estadígrafos están familiarizados con una sorprendente paradoja de tipo 1: la paradoja de Simpson, que puede presentarse al comparar tasas de sucesos (tasas de incidentes) en dos poblaciones. Se describirá un ejemplo hipotético con muestras del mundo real en el apéndice de este capítulo.

Un investigador desea comparar la eficacia de dos medicamentos (píldoras rojas con píldoras amarillas) para una rara enfermedad que, de no ser tratada, será mortal. Como los hombres y las mujeres pueden reaccionar de modos diferentes a estos tratamientos, los datos se registraron por separado, para cada sexo. En total son tratados 245 pacientes (200 hombres y 45 mujeres) y a cada uno de ellos se les da uno de los dos medicamentos. En el cuadro 2.1 se presenta un resumen de los hallazgos. Supóngase que los datos son típicos de todos los pacientes tratados con estos medicamentos. No hay aberraciones.

Nótese que para todos los hombres la píldora roja parece producir una tasa de éxito mayor que la píldora amarilla (80% > 78%). Para las mujeres, con la píldora roja se obtuvieron mejores resultados que con la amarilla (50% > 40%). En consecuencia, parecería que para hombres o mujeres el tratamiento preferente sería con las píldoras rojas.

Nuestro investigador pasa los datos a un colega que combina los datos, desentendiéndose del sexo. Como lo muestran los datos combinados, los pacientes a los que se dieron las píldoras amarillas tienen tasa de supervivencia significativamente mayor (76.2%), que a los que se les administraron las píldoras rojas (71.4%). Así, en general, se podría argumentar que las píldoras amarillas deben ser el tratamiento preferente. Esto representa una inversión completa de los resultados hallados para cada sexo, en que las preferentes fueron las píldoras rojas.

Para desentrañar la paradoja, el lector debe tratar de resolver las siguientes cuestiones:

1. Si usted fuera el paciente, ¿qué tratamiento preferiría: píldoras rojas o amarillas?
2. Supongamos que es usted el médico de la clínica y le informan que acaba de ser ingresado un paciente de la enfermedad que nos ocupa y que requiere de tratamiento. No sabe usted si es hombre o mujer. Si estos medicamentos necesitan ser preparados, ¿de qué color serán las píldoras que prepare?

Una vez que el lector razona, la paradoja debe desaparecer y deben hacerse claras las respuestas a las preguntas anteriores. Se dará una explicación en el apéndice de este capítulo.

Una paradoja de tipo 2 difiere de la de tipo 1 en que la proposición paradójica de tipo 2 es falsa. La presentación es defectuosa y engañosa. En cuanto se descubre el paso falaz, la paradoja se esfuma. Así, en el tipo 2 de paradoja se le pregunta al lector: "¿Qué está mal en esta pintura? ¿En dónde está el error?"

Como muestra de paradoja del tipo 2, consideremos una *demostración* geométrica de que todos los triángulos son isósceles (tienen cuando menos dos lados iguales). Se anima al lector a seguir el razonamiento expuesto y hallar el paso falaz.

La aparente prueba de que todos triángulos son isósceles comienza dibujando el triángulo general ABC (figura 2.3). Luego se procede como se indica:

Paso 1. Trace la bisectriz del ángulo A.

Paso 2. Trace la recta que biseca BC y que es perpendicular a BC. Supongamos que intercepta BC en D.

Paso 3. Si las rectas de los dos pasos anteriores coinciden, entonces el triángulo es isósceles. Supongamos que no es éste el caso (las rectas no son paralelas) y se intersecan en algún punto P.

Paso 4. Dibuje las rectas de P a E y de P a F, que son perpendiculares a AB y AC, respectivamente.

Paso 5. Los dos triángulos APE y APF son congruentes porque ambos son triángulos rectángulos con una hipotenusa común (AP) y tienen ángulos correspondientes iguales.

Paso 6. Como las partes de los triángulos congruentes son iguales, PE = PF.

Paso 7. Nótese que, por construcción, los triángulos BDP y PDC son triángulos rectángulos.

Paso 8. Los dos triángulos rectángulos tienen lados correspondientes iguales. Esto se debe a que comparten un cateto común, DP, y BC es bisecado por D. En consecuencia los dos triángulos son congruentes.

Paso 9. Como las partes correspondientes de los triángulos congruentes son iguales, PB = PC.

Paso 10. Se demuestra ahora que los triángulos rectángulos BEP y PFC son congruentes, pues PB = PC (partes correspondientes de triángulos congruentes) y PE = PF (partes correspondientes de triángulos rectángulos).

Paso 11. Como BE = CF y EA = FA (partes correspondientes), tenemos que BA = CA, y así queda demostrado que el triángulo original es isósceles.

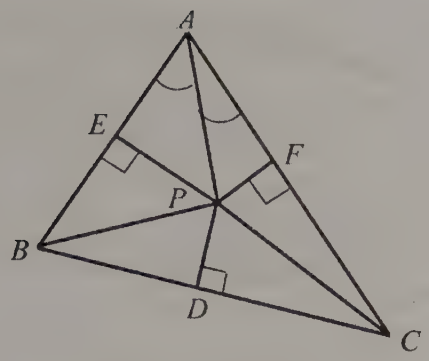


Figura 2.3. ¿Son isósceles todos los triángulos?

Un razonamiento igualmente falaz puede seguirse para demostrar que BC = BA, caso en que se habrá demostrado que el triángulo ABC es equilátero, de donde se puede extraer la conclusión general e igualmente absurda de que todos los triángulos son equiláteros. Para los lectores que no puedan identificar el paso falaz pueden ver el análisis que se hace al respecto en el apéndice de este capítulo.

En *Mathematical Puzzles y Diversions,* Martin Gardner bosqueja (Gardner 59, pp. 146-147) la siguiente paradoja, singular, pues implica dos paradojas, la primera del tipo 1 y la segunda del tipo 2. Un toro es una superficie como la de una dona o un tubo unido a sí mismo por sus extremos. Es paradójicamente (tipo 1) cierto que cortando un hoyo en un lado del toro, la superficie puede volverse al revés y formar otro toro, siempre y cuando el material sea lo suficientemente elástico. (Esto se puede verificar cortando las puntas de dos calcetines y cosiéndolos uno a otro para formar el toro. Corte conforme a un diámetro de cinco centímetros y toda la superficie podrá volverse al revés.)

Comience ahora con un toro que tenga pintado un anillo en el exterior (línea continua) y otro anillo pintado en el interior (línea de puntos), como se muestra en la ilustración superior de la figura 2.4. Los anillos están eslabonados.

Haciendo pasar el toro por el pequeño hoyo lateral, se puede volver hacia adentro con el anillo exterior pasando al interior y el anillo interior pasando al exterior. Pero parece, como se ve en la ilustración inferior de la figura 2.4, que los dos anillos se han liberado uno del otro. ¿Cómo pasaron mágicamente los anillos el uno a través del otro? Esta imposibilidad sugiere una paradoja de tipo 2. ¿En dónde está el error? Se da una explicación en el apéndice de este capítulo.

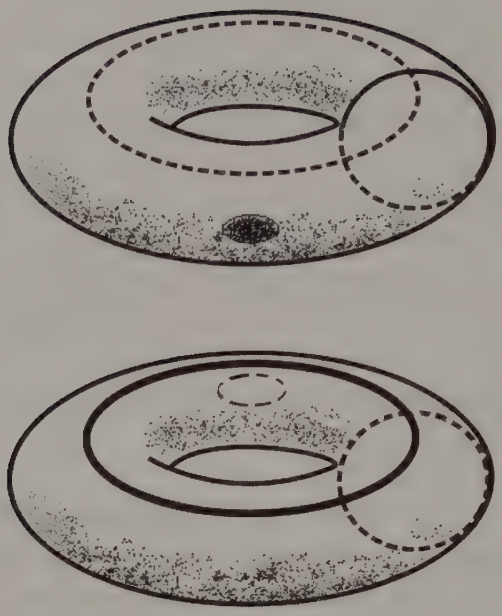


Figura 2.4. Paradoja del toro exterior interior. (Reimpresa con autorización de Martin Gardner.)

¿Pero qué ocurre cuando la proposición o el razonamiento llevan a inconsistencias lógicas que no se pueden resolver? Esta paradoja de tipo 3 es una *antinomia*, definida en el diccionario Webster como "una contradicción entre dos principios igualmente válidos o entre inferencias extraídas correctamente de tales principios". La palabra se usa más en contextos filosóficos o religiosos pero se puede aplicar también a las inconsistencias matemáticas. Se considera que una antinomia es una forma extrema de paradoja, que acaso no tenga una solución aceptada universalmente.

La Paradoja (o Antinomia) de Russell fue descubierta por el matemático británico Bertrand Russell en 1901. Formalmente, considera el conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos. ¿Es este conjunto miembro de sí mismo? Cualquier respuesta lleva de inmediato a una contradicción.

Otra versión de la antinomia, conocida como la *paradoja del barbero*, la introdujo Russell en 1918: "Si el barbero del pueblo rasura a los hombres y solamente a los hombres que no se rasuran a sí mismos, entonces ¿quién rasura al barbero?" Como antes, si suponemos que el barbero se rasura a sí mismo o no se rasura a sí mismo, caemos al instante en contradicción.

No hay una solución sencilla a tales proposiciones autorreferenciales. Alfred Tarski, coautor del teorema de Banach-Tarski, propuso el concepto de metalenguajes para lidiar con tales problemas, creando una jerarquía de metalenguajes, cada uno de ellos con la verdad o la falsedad de los subordinados a ellos.

Russell propuso un enfoque equivalente al que llamó *teoría de los tipos*. En esencia señala que proposiciones como "un conjunto es miembro de sí mismo" o "un conjunto no es miembro de sí mismo" carecen de significado. La teoría niega la existencia de conjuntos que se contradigan a sí mismos.

Hay muchas variaciones equivalentes a estas contradicciones autorreferenciales. Entre ellas están las siguientes:

"Divide todos los adjetivos en dos grupos: los que se describen a sí mismos y los que no. ¿A qué grupo pertenece la palabra indescriptible?"

"Yo soy mentiroso".

"Toda proposición general es falsa".

FALACIAS DE ROMPECABEZAS

Hay miles de paradojas geométricas que se encuentran en libros y publicaciones periódicas de matemáticas. Este capítulo concluye con una colección de falacias de rompecabezas (paradojas tipo 2) de aspecto similar a la paradoja de Banach-Tarski. Sin embargo, hay una diferencia muy importante. Los siguientes ejemplos son engaños. Son engañosos, y su truco es difícil de detectar. En comparación con éstas, las que se presentan en los capítulos 4 y 5, incluida la paradoja de Banach-Tarski, son del tipo 1 y, por tanto, verdaderas en realidad.

A una colección de falacias de rompecabezas se le podría llamar propiamente *Loyd Vanishes* [Loyd se desvanece], pues fueron inspiradas por el gran autor de rompecabezas norteamericano Sam Loyd (1841-1911). Loyd creó miles de rompecabezas, muchos de los cuales fueron publicados por su hijo, Samuel Loyd Jr., después de la muerte de su padre. En 1896 patentó su rompecabezas "Fuera de la Tierra", con mucho su invención más famosa. Un disco que rota y representa a la tierra está fijo a una tabla rectangular. Alrededor de la circunferencia están pintados trece guerreros chinos, de modo que parte de cada guerrero está sobre la Tierra (en el disco) y parte en la tabla rectangular. Cuando la tierra se pone con la flecha apuntando hacia el NE, se pueden contar trece guerreros chinos. Cuando el disco se hace girar hasta que la flecha

apunte al NO, sólo aparecen doce guerreros chinos. ¿A dónde se fue el guerrero faltante? Invirtiendo el proceso, reaparece el guerrero que se había desvanecido (véase figura 2.5).

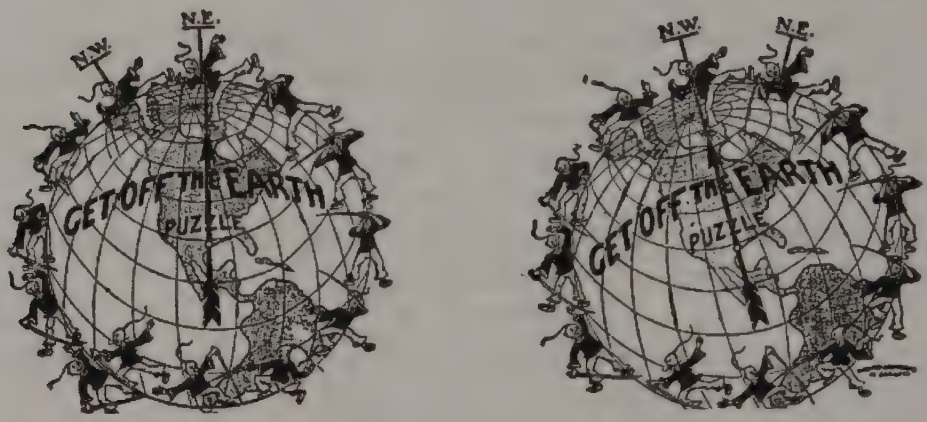


Figura 2.5. Rompecabezas "Fuera de la Tierra" de Sam Loyd [Gardner 56, Figuras 64 y 64a]. (Reimpreso con autorización de Dover Publications, Inc.)

El engaño es tan bello como sutil. Para descubrir el concepto, el lector podría fotocopiar la ilustración de la figura 2.6, que representa una variación de la recién descrita y a la cual podría llamarse "El astronauta que se desvanece" (Young 02). Con tijeras, corte la parte superior del disco y colóquelo en el centro del anillo de abajo.

Cuando la flecha del disco interior se hace coincidir con la A del anillo exterior, son visibles quince astronautas. Cuando el disco interior se hace girar hasta que la flecha apunte a la posición de B, solo aparecen catorce astronautas. ¿Cuál se desvaneció?

La compañía W. A. Elliott de Toronto vendió una ingeniosa versión de la paradoja, a la que llamó "El duende que se desvanece" (figura 2.7). Está formado por tres piezas rectangulares de tabla, ensambladas para formar un gran rectángulo. Los dos rectángulos pequeños están en la parte superior y el rectángulo más grande abajo. Es un arreglo lineal de duendes con una parte de cada duende en la mitad superior y una parte en la mitad inferior. Cuando se intercambian los dos rectángulos superiores, desaparece el duende.

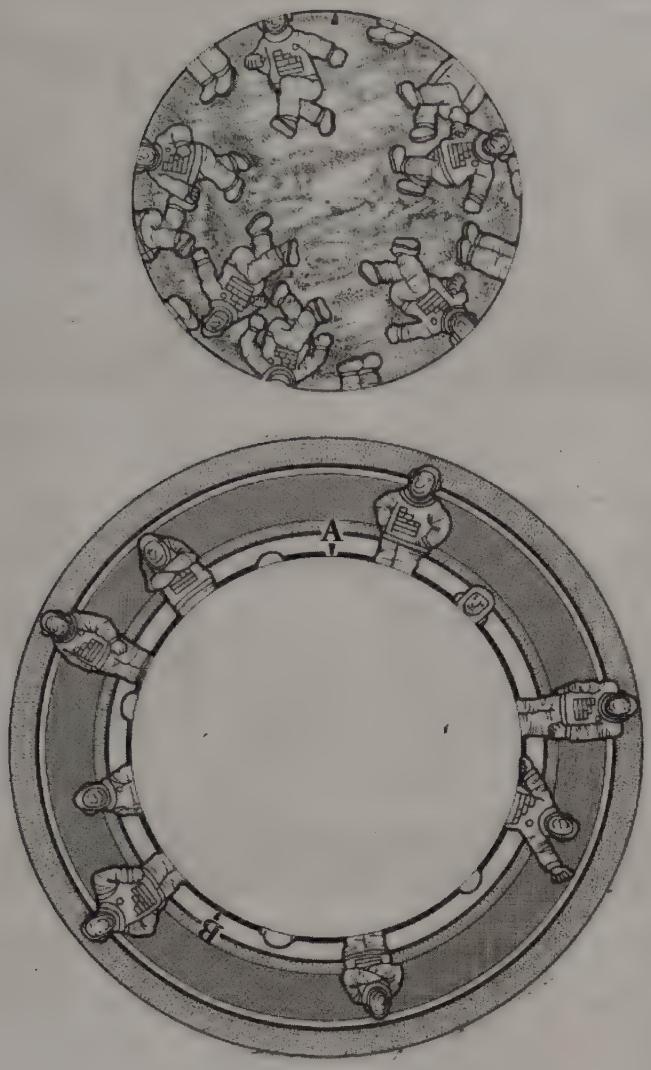
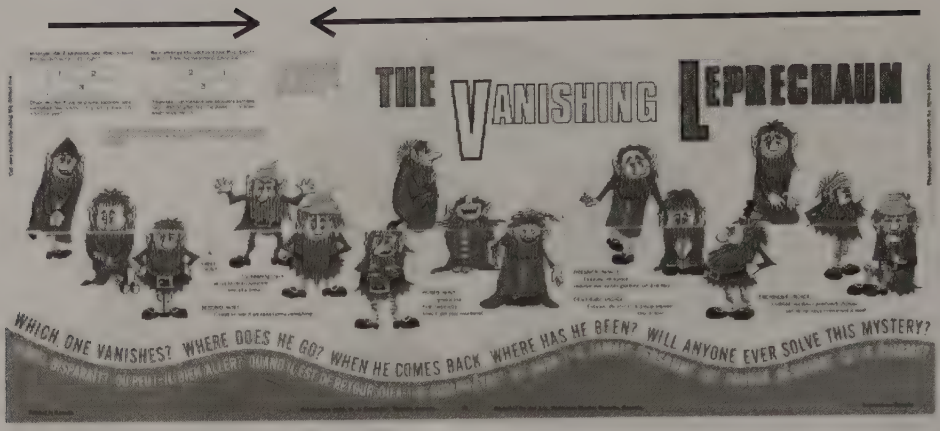


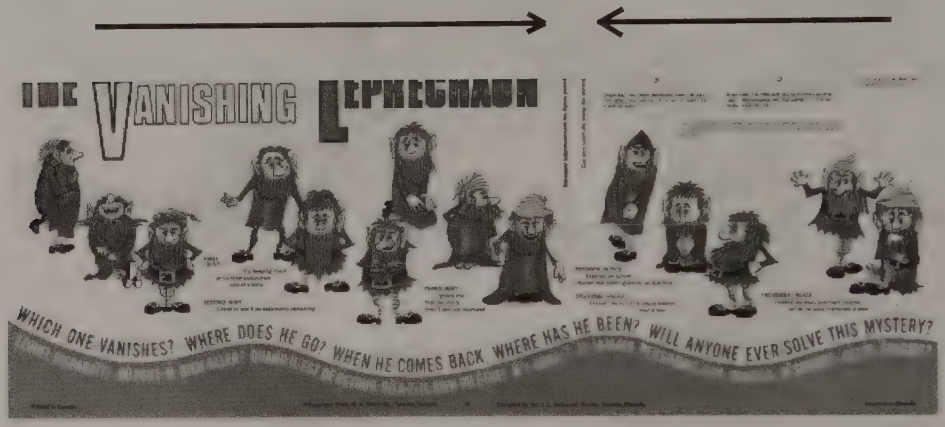
Figura 2.6. "El astronauta que se desvanece." (Reimpreso con autorización de la AIMS Education Foundation, de Puzzle Play © 2001 AIMS Education Foundation. Reservados todos los derechos.)

Si el lector ha sido incapaz de detectar el engaño de *Loyd se desvanece* presentado en este punto, entonces la siguiente "materialización", a la que recurren muchos falsificadores, debiera aclarar el asunto.

Comience con nueve billetes, como se ve en el paso 1 de la figura 2.8. Enseguida, corte cada uno de ellos transversalmente, como se muestra en el paso 2. En el paso 3, transfiera la porción derecha de cada billete al billete inmediatamente inferior hasta llegar al último, como se ve en el paso 4.



Quince duendes



Catorce duendes

Figura 2.7. "El duende que se desvanece." (Impreso con autorización de Pat Lyons. Reservados todos los derechos.)

Ya debe haber quedado suficientemente claro qué es lo que realmente ocurre en estos engaños. Moviendo cada porción derecha al billete que está inmediatamente debajo de ella, los largos de cada billete son 9/10 de la longitud original. La disminución del 10% de la superficie del billete es difícil de percibir, a menos que billetes sin alterar sean colocados lado a lado de los alterados. En efecto, se ha creado un billete nuevo a partir de los nueve originales, cada uno de los cuales dona 10% de su largo.

Esto es algo así como estirar cuatro porciones de chícharos a cinco, quitando un poco de cada una de las porciones a fin de formar la quinta.

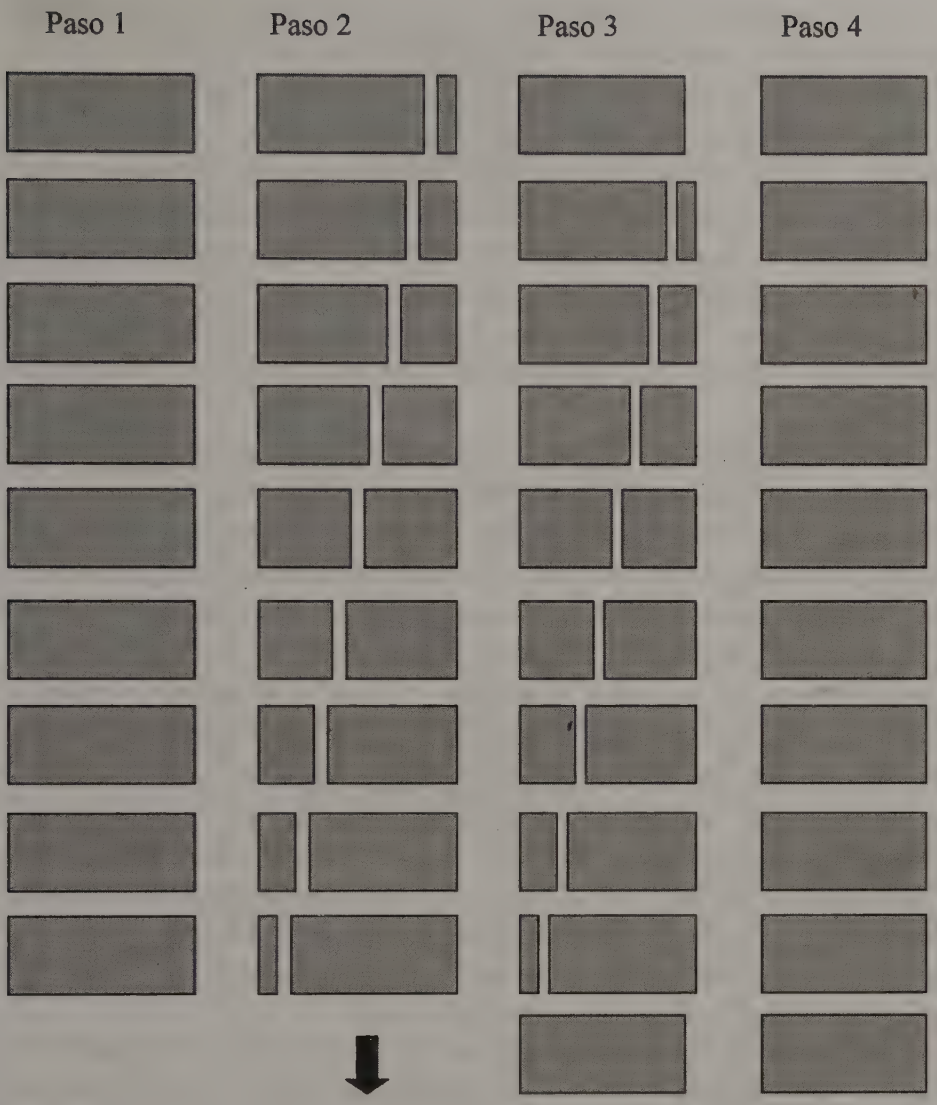


Figura 2.8. Nueve billetes se convierten en diez.

Un examen detenido del rompecabezas "Fuera de la tierra" mostrará que la estatura de cada guerrero chino ha aumentado ligeramente después de ocurrida la desaparición. Del mismo modo, los astronautas y los duendes también aumentan de tamaño después de que uno de ellos se desvanece. A pesar de la simplicidad de la explicación, los engaños tienen que ilustrarse con ingenio para encubrir el secreto.

Los falsificadores han explotado "La desaparición/reaparición de Loyd" con poco éxito. Naturalmente, cortar los billetes de este modo

es un delito federal, que viola el Capítulo 25, Título 18 de la Sección de Códigos 484 de los Estados Unidos de América. En la edición del 19 de noviembre de 1968 del *Chicago Daily News* se informó que Reuben Silver, de Londres, había sido sentenciado por hacer lo anterior con billetes de cinco libras. "El tribunal dictaminó que el sistema era tan bueno que sus detalles no podían hacerse públicos" (Gardner 76, p. 34). Nótese que con respecto al dinero de EU, los billetes falsos son fáciles de detectar comprobando los dos números de serie impresos a cada lado del billete. Como los billetes alterados se componen de dos partes de dos billetes distintos, no concuerdan los números de serie de los billetes alterados.

Otra forma de fraude, el *raspado*, consiste en "rasurar" el metal de las monedas que contienen los metales preciosos oro y plata. Los griegos y los romanos ponían un reborde de cuentas de vidrio en sus monedas para desanimar a los raspadores, sólo que con poco éxito. El raspado siguió siendo una molestia hasta mediados del siglo XVII, cuando se introdujeron en Inglaterra nuevas técnicas y máquinas para imprimir un intrincado dibujo en el borde de las monedas: "DECVS ET TVTAMEN" [Ornamento y protección]. Con el nuevo proceso el raspado se volvió prácticamente imposible y el uso de las máquinas se extendió por toda Europa.

Hoy, las monedas norteamericanas tienen pequeñas arrugas, conocidas como *molduras de junquillos*, en las monedas de diez, veinticinco y cincuenta centavos y un dólar. Pese a que estas monedas no tienen contenido alguno de metales preciosos, se sigue aplicando el proceso de imprimir molduras de junquillos por razones cosméticas así como para que sirvan de identificadores para los ciegos.

Y luego está la historia del programador de computadoras que, en su calidad de empleado del banco, redondeaba las pagos de intereses a los clientes al centavo inmediatamente inferior y la diferencia la abonaba a una especial: la del propio programador. El fraude tuvo éxito durante cierto tiempo porque la cantidad de dinero "robada" cada vez de cada cuenta era demasiado pequeña comparada con el total, de modo que el propietario no advertía la merma.

El siguiente grupo de falacias de rompecabezas implica otra clase de artimaña Cada uno puede presentarse como aparición o desaparición y el engaño ser tan sutil que es imposible de descubrir si las figuras se ilustran cuidadosamente.

El primero muestra la división de un cuadrado de 8 x 8, o tablero de ajedrez, en cuatro piezas, con las dimensiones que se ven el la figura 2.9. El cuadrado original, de 8 x 8, tiene un área de 64 unidades.

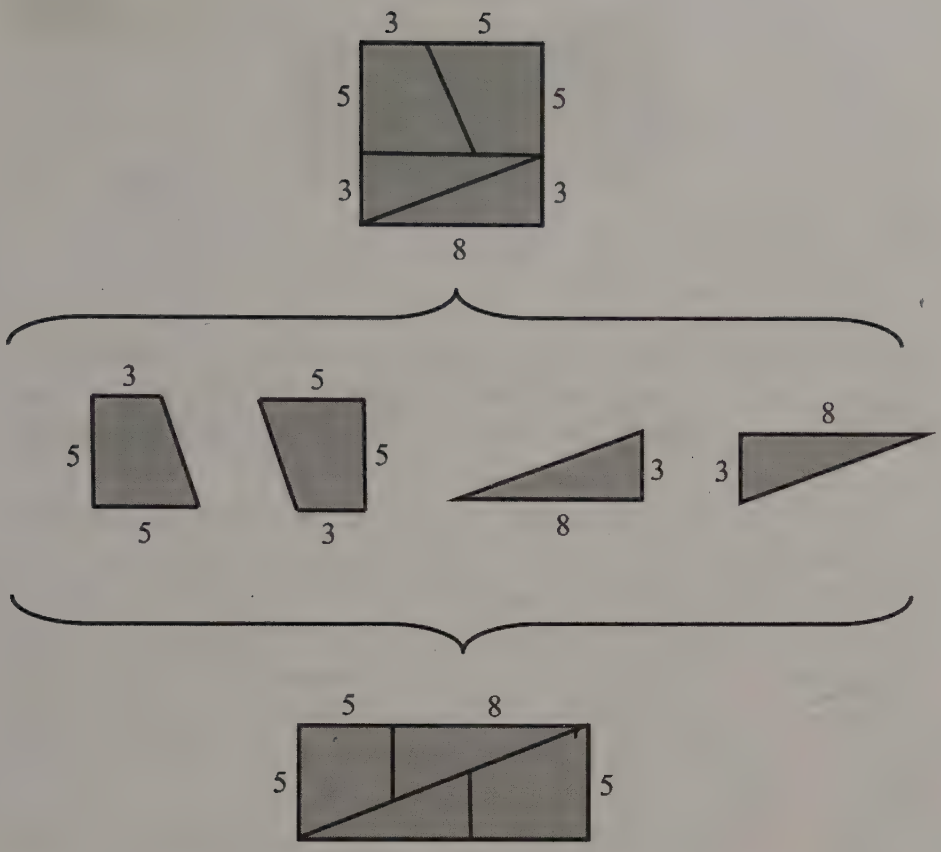


Figura 2.9. Disección paradójica de un tablero de ajedrez.

Las piezas se reacomodan para formar un rectángulo de 5 x 13, ahora de área 65. Así, por división y traslación, parece haber una ganancia inexplicable de una unidad cuadrada. Si el proceso se presenta a la inversa, habría la desaparición de una unidad cuadrada (figura 2.9).

¿Percibe el lector el engaño?

En esta muestra, la paradoja ocurre como resultado de una ilustración engañosa. Las cuatro piezas se acomodarán para formar un rectángulo de 5 x 13, pero no como lo muestra la figura 2.9.

La larga diagonal que va del ángulo inferior izquierdo al superior derecho del dibujo de 5 x 13 en realidad no existe. Las piezas se juntan de tal modo que se produce un espacio en forma de delgado paralelogramo. La figura 2.10 muestra el hueco, levemente exagerado.

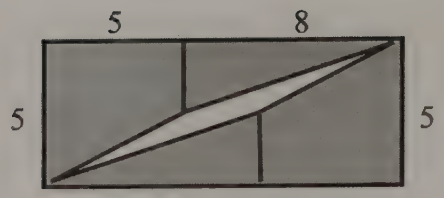


Figura 2.10. ¡Cuidado con el hueco!

El área de este estrecho paralelogramo tiene exactamente una unidad cuadrada que explica el incremento de una unidad del área del rectángulo mayor. Como se advierte a los londinenses cuando pasan del andén al tren: ¡Cuidado con el hueco!

Hablando de cortes de tableros de ajedrez, se encontró la siguiente en el sitio de Internet *Cut The Knot* (http://www.cut-the-knot.org). Todo interesado en las matemáticas recreativas debe visitar el sitio.

Se corta, escalonadamente, un tablero de ajedrez, siguiendo la diagonal, como se ve en la figura 2.11. Cuando se reensamblan las dos partes se obtiene un rectángulo de 9 x 7. El área del tablero ha pasado de 64 a 63 casillas. Tenemos aquí, pues, una pérdida paradójica de una casilla o unidad cuadrada. ¿A dónde se fue la casilla faltante?

Trate de resolver visualmente la paradoja, sin usar regla ni redibujar la figura.

Los triángulos, lo mismo que los rectángulos, pueden disecarse (en su acepción de dividir en partes) y rearmarse de modos paradójicos. Al triángulo disecado de la 2.12 a veces se le llama *Triángulo de Curry*, en honor al gran matemático y mago Paul Curry. Martin Gardner muestra muchas variaciones de este tema en *Mathematics, Magic and Mystery* [Matemáticas, magia y misterio] (Gardner 56, pp. 145-150).

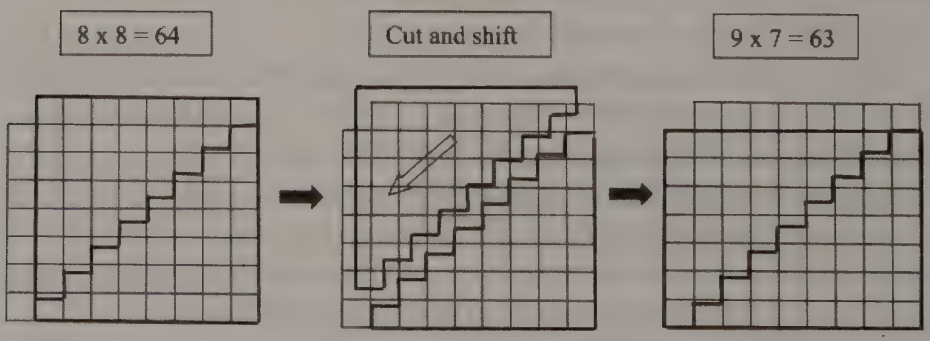


Figura 2.11. Otra disección de tablero de ajedrez.

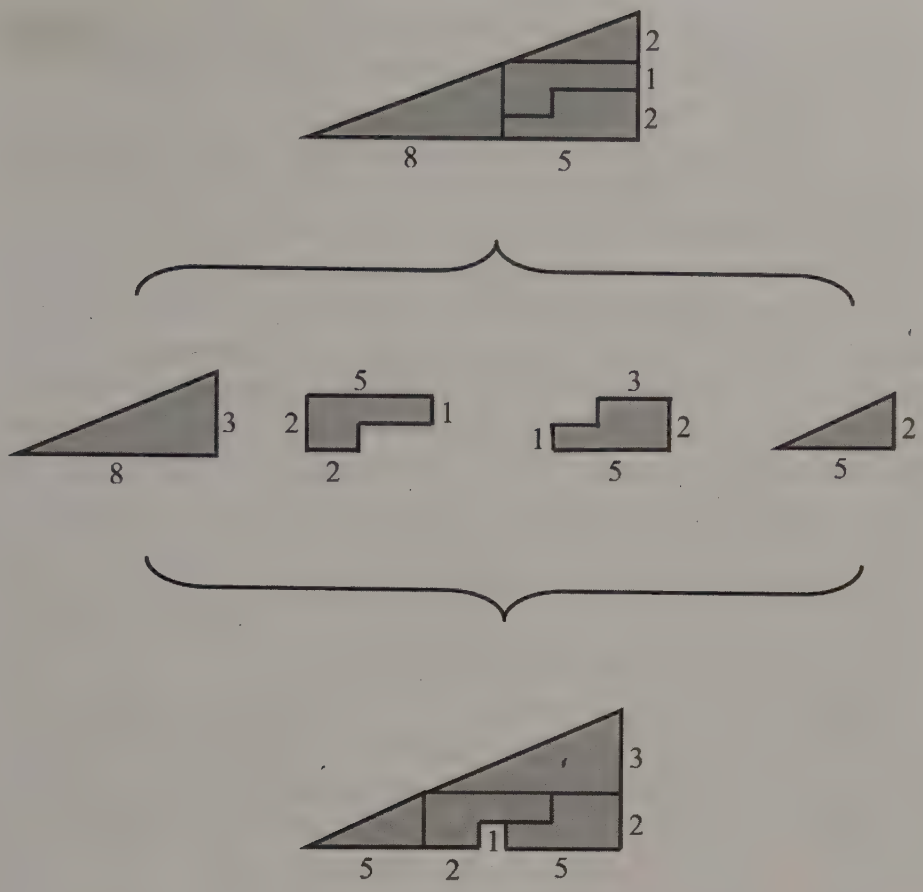


Figura 2.12. Triángulo de Curry.

El triángulo rectángulo original, uno de cuyos catetos es la base de longitud 13 y el otro, vertical, de longitud 5, se divide en cuatro partes como se muestra en la figura 2.12. Cuando se reacomodan las partes, casi forman un triángulo idéntico al original, sólo que a éste le falta una unidad cuadrada. De nuevo estamos frente a una pérdida paradójica de una unidad cuadrada. Inspeccione el lector detenidamente la figura y de seguro despejará la incógnita.

Paul Curry combinó los conceptos de desaparición tratados para crear "La paradoja del conejo que desaparece" (figura 2.13).

El rectángulo de 6 x 13 de la izquierda contiene 78 cuadrados, cada uno de los cuales contiene la figura de un conejo. El rectángulo grande se divide a continuación en cinco piezas y se rearma, formando otro rectángulo de 6 x 13. Pero ahora parece ser que desapareció uno de los

conejos. Nótese que cada una de las partes de la izquierda que resultan de disecarlo concuerda con cada una de las partes de la derecha.

¿Cómo nos explicamos que falte un conejo?

Las recreaciones son entretenidas y han servido para montar el escenario en que vamos a explorar el famoso teorema de Banach y Tarski. El capítulo 3 será *un retorno a la escuela* a fin de revisar las matemáticas que necesitamos para apreciar en toda su magnitud el teorema y su demostración. Entre los temas que revisaremos están la teoría de conjuntos y la geometría plana. Además, se pueden introducir algunos conceptos nuevos, según los conocimientos matemáticos en posesión del lector.

Luego, en el capítulo 4, se presentará la antecesora de la paradoja BT. Estas son disecciones matemáticamente válidas y reacomodos que producen una ganancia aparente. Tenga presente que las falacias de rompecabezas que se acaban de hacer desfilar en este capítulo 2 son sólo eso: falacias. Las paradojas BT en su infancia, por otro lado, no son falacias. Las construcciones son simples, los resultados son paradojas del tipo 1 y las conclusiones son válidas.

Iremos directamente al teorema de Banach-Tarski en el capítulo 5, que es el primordial en este libro. Como en el caso de la infancia de las BT, las consecuencias del teorema son notables pero válidas. Tales resultados fuerzan a los matemáticos a reconsiderar la naturaleza de su disciplina y cómo se relaciona ésta con el mundo físico.

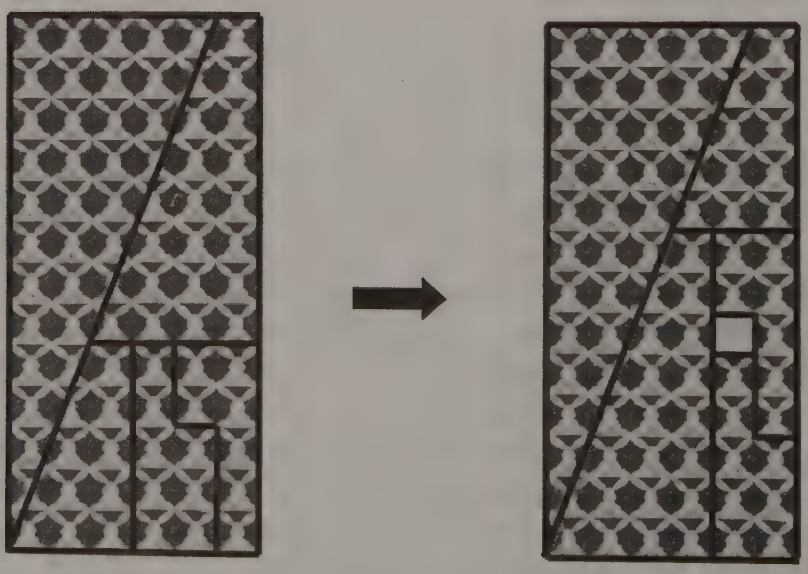


Figura 2.13. La paradoja del conejo que desaparece. (Cortesía de Myles Curry.)

APÉNDICE

La Paradoja de Simpson se resuelve considerando los factores que contribuyen a la tasa total de éxito en estudio. En el ejemplo dado, el tipo de medicamento (píldoras rojas o amarillas) es un factor y el sexo del paciente, otro. Nótese que la tasa de supervivencia de la población masculina es significativamente mayor que la de la población femenina, independientemente del medicamento.

Las píldoras rojas son, por cierto, más eficaces que las amarillas y deben ser el tratamiento preferente tanto para el paciente como para el médico. La combinación de los datos enmascara este hecho, sugiriendo que las píldoras amarillas son más eficaces, como resultado del hecho de que las píldoras amarillas se dieron, casi exclusivamente, a pacientes masculinos, que obtienen resultados mucho mejores todos ellos que las pacientes femeninas. Los datos combinados muestran paradójicamente el éxito de las píldoras amarillas, que en realidad es supervivencia de los hombres. Sería incorrecto atribuir la supervivencia a las píldoras amarillas. Se debe ser precavido cuando se combinan datos para evitar el fenómeno de Simpson.

Se han documentado en el mundo real acaecimientos de la paradoja de Simpson. Las siguientes tres las registró C. H. Wagner (Wagner 82, pp. 46-88):

1. La tasa de renovación de suscripciones de la *American History Illustrated* aumentó de enero de 1979 a febrero del mismo año a pesar de que decreció la tasa de cada categoría de subscriptor.
2. El impuesto federal total aumentó de 1974 a 1978 a pesar de que decreció en lo correspondiente a cada grupo de ingresos.
3. La tasa de mortalidad por tuberculosis de 1910 fue mayor en Richmond, Virginia, que en la ciudad de Nueva York; sin embargo, fue menor para blancos y no blancos durante el mismo lapso.

Existe una bien documentada manifestación clásica de la paradoja de Simpson con respecto a la predisposición por sexo (Bickel, Hammel y O'Conell 75). Para el trimestre de otoño de 1973, la Universidad de California, en Berkeley, aceptó 44% de solicitudes de hombres para su programa de posgrado, comparado con 35% de solicitantes mujeres. Las selecciones se hicieron de un lote de alrededor de 15 000 solicitantes, lo que sugiere favoritismo sexual hacia los solicitantes hombres y la posibilidad de discriminación por sexo. Sin embargo, cuando se hizo un análisis por departamento, no hubo predisposición a favor de los

hombres. Lo más interesante es que había favoritismo hacia las mujeres. ¿Por qué la agrupación causa lo inverso?

Los hombres tendieron a solicitar inscripción en los departamentos que aceptaban un alto porcentaje (60% a 80% de todos los solicitantes), mientras que las mujeres solicitaron inscripciones en departamentos más competidos con una tasa menor de aceptación tanto para hombres como para mujeres. Entonces, cuando se combinaron los resultados, brotó el indicio de discriminación sexual. Como siempre, se debe tener cuidado al interpretar datos combinados.

La paradoja del toro exterior interior, de tipo 2, se aclara al notar el error que hay en su presentación. Es correcto que se puede volver el toro al revés para formar otro toro.

También es correcto que el anillo exterior pasará al interior y el interior al exterior. Lo incorrecto es la parte inferior de la figura 2.4. Los anillos, claro, no pueden pasar uno a través del otro, y la orientación correcta después de volver hacia fuera el interior del toro se muestra en la figura 2.14. Los anillos permanecen eslabonados.

Las figuras mal dibujadas son responsables de las paradojas de tipo 2, incluida la llamada demostración de que todos los triángulos son isósceles. El engaño se da en el tercer paso de la "demostración". El punto P, la intersección de dos rectas no paralelas, se muestra como si estuviera dentro del triángulo ABC. En realidad se encuentra fuera del triángulo ABC, como se ve en la figura 2.15.

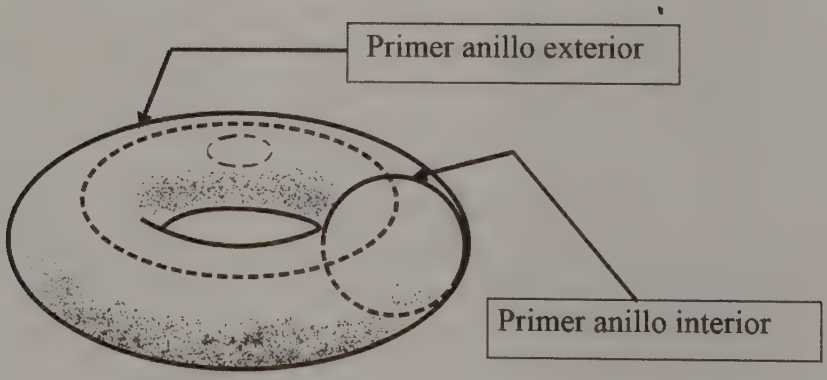


Figura 2.14 Vista correcta del toro vuelto hacia fuera su interior. (Reimpreso con autorización de Martin Gardner.)

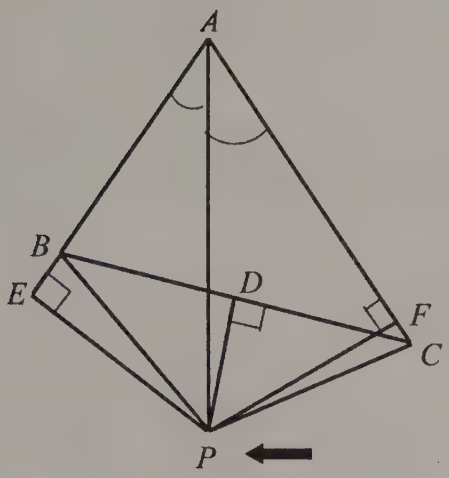
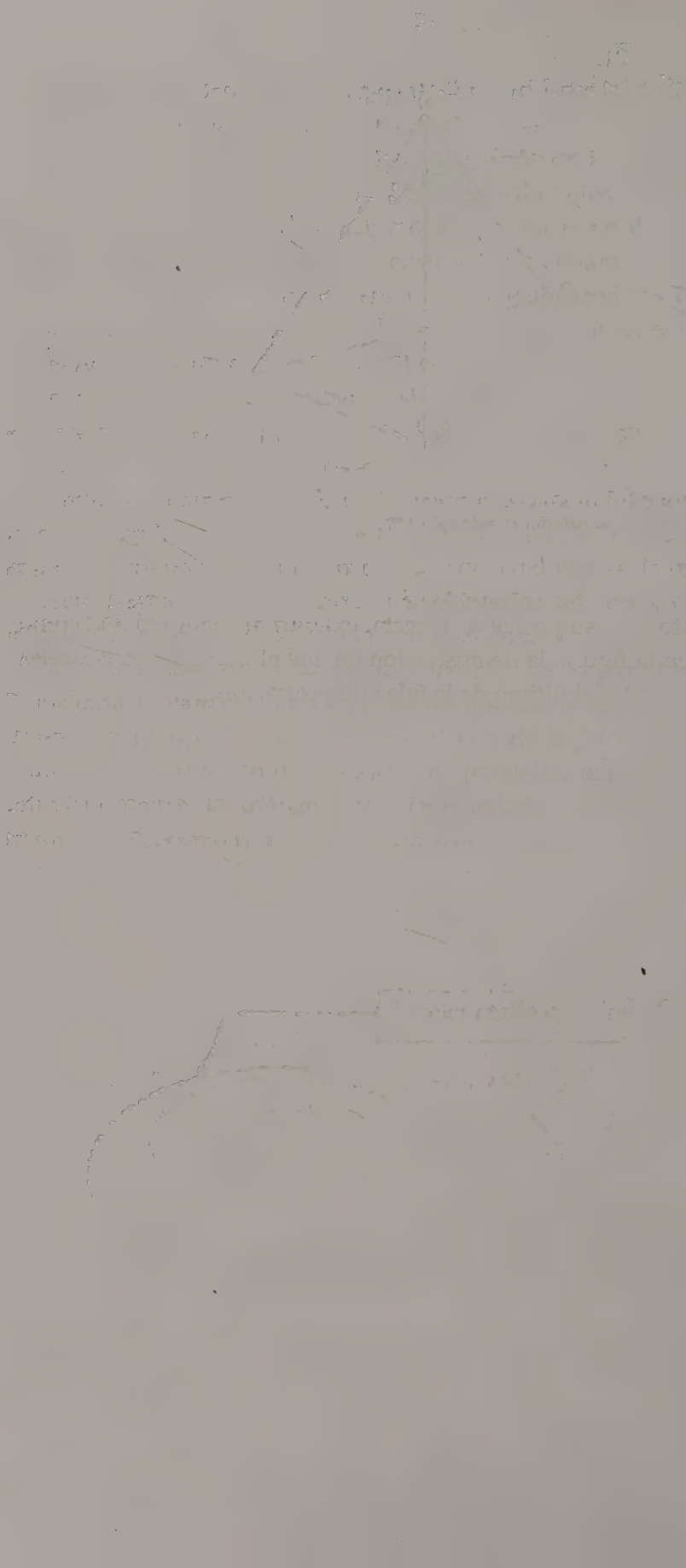


Figura 2. 15. El punto *P* es exterior al triángulo *ABC*.

Con el punto *P* en su posición correcta, exterior al triángulo *ABC* como se aprecia en la figura, la demostración de que el triángulo es isósceles falla en el paso 11, el último de la falaz demostración.



.3.

PRELIMINARES

¡La clase de matemáticas es incomprensible!
VOZ DE BARBIE, 1992, MATTELL™

Lo largo de la demostración del teorema de Banach-Tarski depende del nivel de las matemáticas que se empleen. Puede exponerse la demostración en una sola página siempre y cuando el lector esté familiarizado con la teoría de conjuntos, la equidescomponibilidad y la Paradoja de Hausdorff. Aquí suponemos que el lector carece de esos conocimientos. Así que la demostración que se desarrollará en el capítulo 4 será un poquitín larga, pero elemental. Es algo así como construir una casa: cuanto más avanzado el equipo, las herramientas y el personal, tanto más rápidamente se concluirá. Se podría construir la misma casa con sólo herramientas de mano, pero terminarla llevaría un tiempo significativamente mayor.

A pesar de nuestro enfoque elemental, tendremos que revisar los siguientes cuatro temas antes de comenzar la demostración:

1. Teoría de conjuntos
2. Isometrías
3. Equivalencia de descomposición
4. Equidescomponibilidad

Mucho de lo que revisaremos es bastante sencillo y se puede enseñar a los alumnos de primaria. La teoría de conjuntos, por ejemplo, fue introducida en el plan de estudios de las escuelas primarias de Estados Unidos en los años sesenta como parte de las llamadas

nuevas matemáticas. Hubo un incentivo por engrosar el plan de estudios de ciencias en general y matemáticas en particular en Estados Unidos como secuela del lanzamiento por la Unión Soviética del satélite Sputnik el 4 de octubre de 1957. Una década después se eliminó de dicho plan gran parte de la teoría de conjuntos pues se pensó que los alumnos no estaban aprendiendo lo suficiente de la materia de computación básica; la teoría de conjuntos se podría enseñar posteriormente.

El lector no debe asociar la notación compleja con las matemáticas complejas. Mucho de este capítulo es intuitivo y se ha hecho todo lo posible por mantener la notación en un nivel elemental.

TEORÍA DE CONJUNTOS

Definición de conjunto

Un conjunto es una colección de objetos. Cada objeto del conjunto se llama elemento o miembro del conjunto.

Como ejemplos de conjuntos podrían figurar el conjunto de todos los ciudadanos que viven en Estados Unidos, el conjunto de todos los números reales mayores que cinco y el conjunto de todos los puntos del espacio tridimensional que están a una unidad de un punto dado. El último ejemplo es un *conjunto de puntos* y, en este caso, representa una esfera sólida, bola o pelota de radio uno. En la demostración del teorema de Banach-Tarski intervienen conjuntos de puntos y conjuntos de rotaciones. Nos ocuparemos de las rotaciones en la sección de isometrías de este capítulo.

En lo fundamental existen tres maneras de definir un conjunto. La manera más obvia consiste en describirlo, como hicimos en los ejemplos anteriores. Respecto de los conjuntos que consisten en objetos matemáticos (números, variables, puntos, etc.) podemos ser más precisos. Escribimos $A = \{a, b, c\}$ para indicar el conjunto cuyos miembros son los tres elementos a, b y c. Éste es el método de lista o enumeración de describir conjuntos. Podemos especificar el conjunto de los números naturales (los que se usan para contar) de uno a diez como $B = \{1, 2, 3,\ldots 10\}$. El método de hacer una lista se presta para definir conjuntos pequeños, en los cuales se puede especificar con exactitud cada elemento.

La tercera opción, la *notación constructiva,* es un modo formal de describir conjuntos cuyos elementos no son fáciles de enumerar. El conjunto de todos los puntos (x, y, z) del espacio tridimensional que

satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ se puede especificar como $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Este conjunto de puntos tridimensional es la esfera de radio uno con centro en (0, 0, 0).

El símbolo $\in$ denota pertenencia. Cuando escribimos $1 \in \{1, 2, 3\}$ estamos indicando que el número 1 es elemento del conjunto {1, 2, 3}. Del mismo modo, escribimos $4 \notin \{1, 2, 3\}$. La *cardinalidad* de un conjunto es sencillamente el número de elementos del conjunto. La cardinalidad es una medida del contenido del conjunto, que responde a la pregunta "cuántos". Por ejemplo, si A = {1, 5, 7, 9, 20}, entonces la cardinalidad de A es cinco y escribimos $n(a) = 5$ para denotar el dato. Recuérdese, del capítulo 1, que la cardinalidad del conjunto de los números naturales es $\aleph_0$ y que la cardinalidad del continuo es c. Más adelante, en este mismo capítulo, abundaremos sobre las cardinalidades del infinito.

En cualquier aplicación de la teoría que nos ocupa, hay dos conjuntos de cardinalidad extrema. El primero de ellos es el conjunto nulo o *vacío*, que no tiene miembros. Se especifica con el símbolo $\varnothing$ o {}. Nótese que $n(\varnothing) = 0$. El otro es el conjunto *universal U*, que, por definición, es el conjunto de todos los elementos que se están considerando en un caso dado. Piénsese en ese conjunto universal como el medio o el contexto en que reside el conjunto de los casos a que se está aplicando la teoría. Por ejemplo, al hacerse un estudio estadístico de las preferencias de voto de los ciudadanos, el conjunto U sería el conjunto de todos los ciudadanos registrados en el padrón electoral. Al trabajar con puntos del espacio tridimensional, el conjunto universal sería el conjunto de todos los puntos del espacio tridimensional.

Definición de subconjunto

El conjunto A es un subconjunto del conjunto B si y sólo si cada elemento de A es también elemento de B. Escribimos $A \subseteq B$ para denotar el hecho de que A es un subconjunto de B.

Consecuentemente, el conjunto de los números racionales es un subconjunto de los números reales y el conjunto de los números positivos pares es un subconjunto de los números naturales. De ahí que si A no es un subconjunto de B, entonces A debe contener por lo menos un elemento que no es elemento de B. Tal es la razón de que el conjunto vacío, $\varnothing$, sea considerado subconjunto de cualquier conjunto. Pues, de no ser así, debiéramos poder encontrar un elemento en $\varnothing$ que no estuviera en el conjunto dado, lo cual, claramente, es imposible.

Ejemplos:

$\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$\{x: 0 < x < 1\} \subseteq \{x: 0 \leq x < \infty\}$
$\varnothing \subseteq \{1, 2, 3\}$

Definición de igualdad de conjuntos

Dos conjuntos, A y B, son iguales si y sólo si contienen exactamente los mismos elementos. Formalmente, $A = B$ si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

La definición es intuitiva y evoca la igualdad de los números reales. (Los números reales a y b son iguales si $a \leq b$ y $b \leq a$.)

Partiendo de un conjunto o colección de conjuntos dados, podemos definir otros conjuntos aplicando operaciones de conjuntos estándar. Así como el conjunto de los números reales tiene las operaciones básicas de adición, sustracción, multiplicación y división, así también la teoría de conjuntos tiene sus operaciones básicas. A continuación damos algunas definiciones.

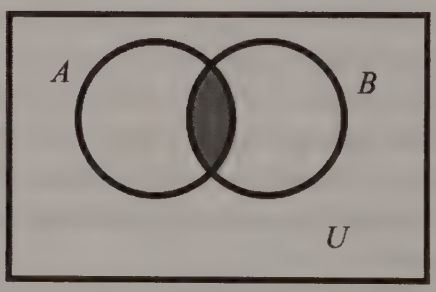


Figura 3.1. El área sombreada es $A \cap B$.

Definición de intersección de conjuntos

La intersección de dos conjuntos A y B, denotada por $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen tanto a A como a B. Formalmente, $A \cap B = \{x: x \in A \text{ y } x \in B\}$.

Ejemplos:

$\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5\} = \{1, 3\}$
$\{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \varnothing$
$\{1, 2, 3\} \cap \varnothing = \varnothing$

El diagrama de Venn de la figura 3.1 ilustra el concepto de intersección de conjuntos de puntos del plano.

Definición de unión de conjuntos

La unión de dos conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B. Formalmente, $A \cup B = \{x: x \in A \text{ o } x \in B\}$.

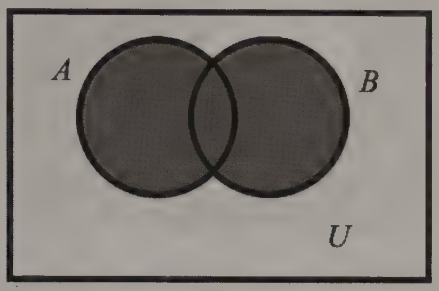


Figura 3.2. El área sombreada es A ∪ B.

Ejemplos:

$\{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$
$\{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$\{1, 2, 3\} \cup \varnothing = \{1, 2, 3\}$

El diagrama de Venn de la figura 3.2 ilustra el concepto de unión para conjuntos de puntos en el plano.

Definición de complemento de conjunto

El complemento de un conjunto A, denotado por A^C, es el conjunto de elementos de U que no están en A. Formalmente, $A^C = \{x: x \in U, x \notin A\}$.

Es de notar que el complemento de un conjunto no puede especificarse a menos que tengamos una definición clara del conjunto universal.

Ejemplos:

Sean U = {1, 2, 3,... 10}, A = {1, 2, 3} y B = {2, 4, 6, 8, 10}.

Entonces
$A^C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$(A \cup B)^C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}^C = \{5, 7, 9\}$
$U^C = \varnothing$
$\varnothing^C = U$

El diagrama de Venn de la figura 3.3 ilustra el concepto de complemento de un conjunto de puntos del plano.

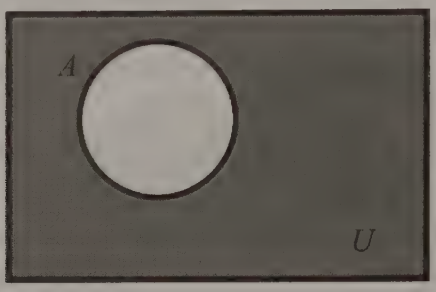


Figura 3.3. El área sombreada es A^C.

Definición de diferencia de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. La diferencia $A - B$ es el conjunto de todos los elementos de A que no están en B. Formalmente $A - B = \{x: x \in A \text{ y } x \notin B\} = A \cap B^C$.

Ejemplos:

Sean U = {1, 2, 3, ... 10}, A = {1, 2, 3} y B = {2, 4, 6, 8, 10}

Entonces
A – B = {1, 3}
B – A = {4, 6, 8, 10}

El diagrama de Venn de la figura 3.4 ilustra el concepto de diferencia para los conjuntos de puntos del plano.

}

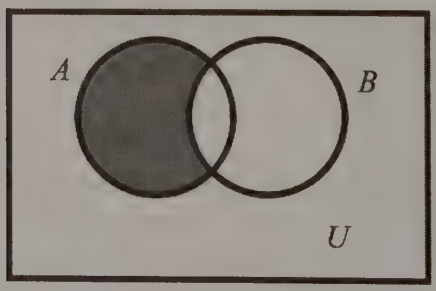


Figura 3.4. El área sombreada es A – B.

Definición de conjunto potencia

Para cualquier conjunto A, el conjunto potencia de A, denotado $\wp(A)$, es el conjunto de todos los subconjuntos de A.

Ejemplo:

Sea A = {1, 2, 3}. Entonces $\wp(A)$ = {{∅}, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}.

Hay ocho subconjuntos como miembros del conjunto potencia. Debemos tener cuidado de incluir ∅ y {1, 2, 3}, ya que éstos, en realidad, también son subconjuntos.

Se puede demostrar que, para todo conjunto finito A, la cardinalidad del conjunto potencia de A es $2^{n(A)}$. Esto es $n[\wp(A)] = 2^{n(A)}$. La demostración, que aquí se omite, es por inducción matemática. En el ejemplo anterior, donde A = {1, 2, 3}, su cardinalidad es 3 y la de $\wp(A)$ es $2^3 = 8$.

Hasta aquí, en nuestra introducción a la teoría de conjuntos, no se ha presentado nada notable ni paradójico, pues los conjuntos finitos son fáciles de entender. Los resultados insólitos y paradójicos brotan al considerar conjuntos de cardinalidad infinita. Dimos un vistazo a dos de tales conjuntos en el capítulo 1: los números de contar {1, 2, 3, ...} y el conjunto de todos los números reales, que denotaremos con $\Re$. Recuérdese que la cardinalidad de {1, 2, 3, ...} se indica con alef cero: $\aleph_0$, que es también la cardinalidad del conjunto de los números racionales. La cardinalidad del conjunto de los números $\Re$ la denota *c*. Esta es la cardinalidad del continuo, que representa también el número de puntos de la recta numérica entre cero y uno. Establecimos que $\aleph_0 < c$ mediante la demostración por diagonalización de Cantor, de que hay más números reales que números naturales. Nos sentimos justificados para escribir $c = 2^{\aleph_0}$ por cada uno de los argumentos que siguen:

1. Cualquier número real entre cero y uno se puede escribir de modo único en notación binaria (de base dos), como $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n \ldots$ en donde cada b_i es o cero o uno. Cada representación es única si impedimos que ésta termine. Se pueden evitar las representaciones que terminan sustituyendo cada una de éstas con su equivalente sin terminación haciéndola concluir en un número infinito de unos. Por ejemplo, escribimos 0.011111... en lugar de 0.1 y 0.1011111...

en vez de 0.11. Como hay dos posibilidades por cada dígito (cero o uno) el total de números reales posibles entre cero y uno puede pensarse como el producto de un número contable de doses. La cardinalidad del continuo es, pues, $c = 2^{\aleph_0}$.

2. Dicho con más precisión, mostramos que hay una correspondencia de uno a uno entre el conjunto de los números reales comprendidos entre cero y uno (cardinalidad c) y el conjunto potencia de los números naturales (cardinalidad $2^{\aleph_0}$). Lo hacemos en dos pasos. Primero, mostramos que hay una función biunívoca, o mapeo (técnicamente llamado *inyección)*, del conjunto de los números reales entre cero y uno y el conjunto potencia de los números naturales. Así establecemos que $c \leq 2^{\aleph_0}$. Luego mostramos que hay una función de uno a uno del conjunto potencia de los números naturales sobre el conjunto de los números reales entre cero y uno. Así se establece que $2^{\aleph_0} \leq c$. Como $2^{\aleph_0} \leq c$ y $c = \leq 2^{\aleph_0}$ llegamos intuitivamente a la conclusión de que $c = 2^{\aleph_0}$. (Una demostración formal de este hecho requiere del teorema de Schröder-Bernstein, con una de cuyas versiones trabajaremos en el capítulo 5.)

Para completar el primer paso de esta argumentación, identificaremos cada número real entre cero y uno con su representación binaria sin terminación $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n \ldots$. A este número le asociamos un subconjunto de los números naturales que incluya al número natural i si y sólo si $b_i = 1$. De este modo establecemos una función de uno a uno de los números reales entre cero y uno en el conjunto potencia de los números naturales. Esto es: $c \leq 2^{\aleph_0}$.

Para establecer la desigualdad inversa, debemos encontrar una función uno a uno del conjunto potencia de los números naturales en el conjunto de los números reales entre cero y uno. Para cada subconjunto de los números naturales defínase una fracción decimal de base diez $d_1d_2d_3\ldots d_n\ldots$ donde $d_i = 1$ si y sólo si i está en el subconjunto de los números naturales; de otro modo, $d_i = 0$. Queda de esta manera establecida una función de uno a uno del conjunto potencia de los números naturales sobre el conjunto de los números reales entre cero y uno. Es decir, $2^{\aleph_0} \leq c$. Como $2^{\aleph_0} \leq c$ y $c \leq 2^{\aleph_0}$ podemos afirmar que $c = 2^{\aleph_0}$.

¿Hay otros números transfinitos? ¿Hay un número transfinito que sea el más grande? En el siguiente teorema se establece una sucesión siempre ascendente de cardinales transfinitos.

El teorema de Cantor

Para cualquier conjunto A, n(A) < n[℘(A)].

Demostración:

Es claro que ℘(A) debe tener cuando menos tantos elementos como A porque a cada a ∈ A podemos asociarle {a} ∈ ℘(A). Queda por demostrar que n(a) ≠ n[℘(A)]. Lo hacemos suponiendo que existe una correspondencia de uno a uno y seguidamente demostrando que esto lleva a una contradicción.

Si suponemos que hay una correspondencia biunívoca entre A y ℘(A), entonces existe una función de uno a uno y suprayectiva *f* de A a ℘(A). Para un a ∈ A arbitrario puede ser (o puede no ser) que a ∈ *f*(a). Sea B = {x: x ∈ A, x ∉ *f*(x)}. Nótese que B ⊆ A ya que B ∈ ℘(A). Por suposición, *f* es suprayectiva, por lo que debe existir b ∈ A tal que *f*(b) = B.

¿Es b ∈ *f*(b)? Cualquiera que sea la respuesta conducirá a una contradicción. Si b ∈ *f*(b), entonces b ∈ B y b ∉ *f*(b). Si b ∉ *f*(b) entonces b ∈ *f*(b). La única salida es suponer que *f* no puede existir, lo que implica n(A) < n[℘(A)].

Así, si empezamos con los números naturales y formamos el conjunto potencia de estos números y luego el conjunto potencia del conjunto potencia de los mismos números naturales, etc., llegaremos a las siguientes cardinalidades transfinitas ascendentes $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}}$... Hermann Weyl se refirió sarcásticamente (Stewart 96, p. 67) a estas cardinalidades como "niebla en la niebla".

¿Hay más números transfinitos cardinales entre los de la secuencia del párrafo anterior?

¡Nunca lo sabremos! Al menos no dentro del sistema axiomático de Zermelo-Frankel. Cantor propuso la existencia de una jerarquía de cardinalidades infinitas que comienzan con el infinito más pequeño: $\aleph_0$. Utilizando la notación alef, Cantor propuso un número infinito de cardinalidades transfinitas: $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots \aleph_n < \aleph_{n+1} < \ldots$ donde $\aleph_{n+1}$ era la siguiente cardinalidad transfinita más grande después de $\aleph_n$, para n = 0, 1, 2,... Sigue pendiente la interrogante de si *c* es la cardinalidad transfinita más grande después de $\aleph_0$. Dicho de otro modo, ¿es $\aleph_0 = c$?

Cantor así lo creía y el lector puede encontrarlo en el capítulo 1 como la famosa hipótesis del continuo. Cantor estaba obsesionado con demostrarla pero no lo pudo hacer. Fueron necesarios los esfuerzos conjuntos de Kurt Gödel y Paul Cohen para establecerla como indecidible. Felix Hausdorff propuso una versión más generalizada en 1908.

Enlaza todas las cardinalidades infinitas mediante la ecuación $\aleph_{n+1} = 2^{\aleph n}$. Esta forma fue establecida como indecidible por Gödel y Cohen.

Como se expuso en el capítulo 1, hay paradojas bien conocidas con la teoría de conjuntos de Zermelo–Fränkel. Las tres que se expondrán enseguida sí se pueden resolver, hasta cierto punto, por técnicas que rebasan los alcances de esta presentación. Todas ellas poseen un tema autorreferencial del *conjunto de todos los conjuntos,* como se examinaron en el capítulo 1. En ninguna de estas paradojas está implicado el axioma de elección. Las paradojas que surgen de este axioma se describirán en los capítulos 4 y 5.

Históricamente, la primera paradoja fue descubierta por Burali-Forti en 1897. Se trata de una proposición sobre números *ordinales* en contraste con *cardinales.* El número cardinal 3 es una medida de totalidad. Representa una medida de *contenido* o de *cantidad.* El número ordinal 3 es una medida de *orden* o *posición.* Si decimos que es usted el 3o de la columna, estamos utilizando el número 3 como número ordinal. Si la cubeta contiene 3 manzanas, estamos empleando el número 3 como número cardinal.

Paradoja de Burali-Forti

Un número ordinal, que representa orden, puede definirse teóricamente como el conjunto de todos sus predecesores.

Símbolo	Definición de conjunto
0	{}
1	{{}}
2	{{}, {}}

En general n se puede definir como {0, 1, 2, 3,... n-1}. El conjunto de todos los números ordinales se definiría entonces como un número ordinal mayor que cualquier número ordinal del conjunto. Por consiguiente, el conjunto de todos los números ordinales no forma un conjunto. Esto es en sí contradictorio.

La paradoja de Cantor es la analogía en números cardinales de la paradoja de Burali-Forti.

La paradoja de Cantor

Sea S el conjunto de todos los conjuntos. Cada subconjunto de S, siendo un conjunto, debe ser también miembro de S. Se infiere que el conjunto potencia

de S es un subconjunto de S. Esto es: $\wp(S) \subseteq S$. *De ser así, entonces* $n[\wp(s)] \leq n(S)$, *que contradice claramente el teorema de Cantor.*

La paradoja de Russell es una versión formal de la paradoja (antinomia) del Barbero que vimos en el capítulo 2.

Paradoja de Russell

Sea Z el conjunto (o colección) de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como miembros. Es decir, $Z = \{X : X \notin X\}$. *¿Es Z miembro de sí mismo? Si sí lo es, entonces por la definición de Z, Z no es miembro de sí mismo. Si no lo es, entonces por la definición de Z, Z es miembro de sí mismo. De uno u otro modo llegamos a una contradicción.*

El axioma de elección, examinado en el capítulo 1, trae consigo más paradojas, la más notable de las cuales es la de Banach-Tarski. Aunque descrita anteriormente, daremos una versión formal del axioma para completar la exposición.

Axioma de elección

Para cualquier colección C de conjuntos no vacíos, podemos escoger un miembro de cada conjunto de la colección. Dicho de otro modo, existe una función de elección f definida sobre C de tal modo que para cada conjunto $S \in C$, $f(S) \in S$.

ISOMETRÍAS

Tome un florero y póngalo en cualquier parte. Matemáticamente hablando, se ha transformado (o mapeado) un conjunto de puntos en otro conjunto de puntos de modo que se ha conservado la forma (florero) del conjunto transformado. La distancia entre pares de puntos del florero sigue siendo la misma, comparando con la posición final del florero la posición inicial del mismo. Tal transformación que conserva la distancia se llama *isometría*. Imagínese una isometría como un movimiento rígido, o transformación de un conjunto de puntos, sin estirar, ni comprimir ni ninguna otra distorsión de la forma (figura 3.5). Cuando se mapea una *preimagen* en una *imagen*, se dice que ambos conjuntos de puntos son *congruentes*.

Cuando, como lo dicta el teorema de Banach-Tarski, dividimos la pelota y reensamblamos las piezas, recurrimos a isometrías para mover las piezas individuales (conjuntos de puntos) de la pelota. Así pues, debe quedar perfectamente claro qué tipos de transformaciones son

isometrías y qué tipos no lo son. Si se permitieran transformaciones no isométricas, entonces crear un volumen grande a partir de otro pequeño sería fácil de hacer por medio de estiramiento.

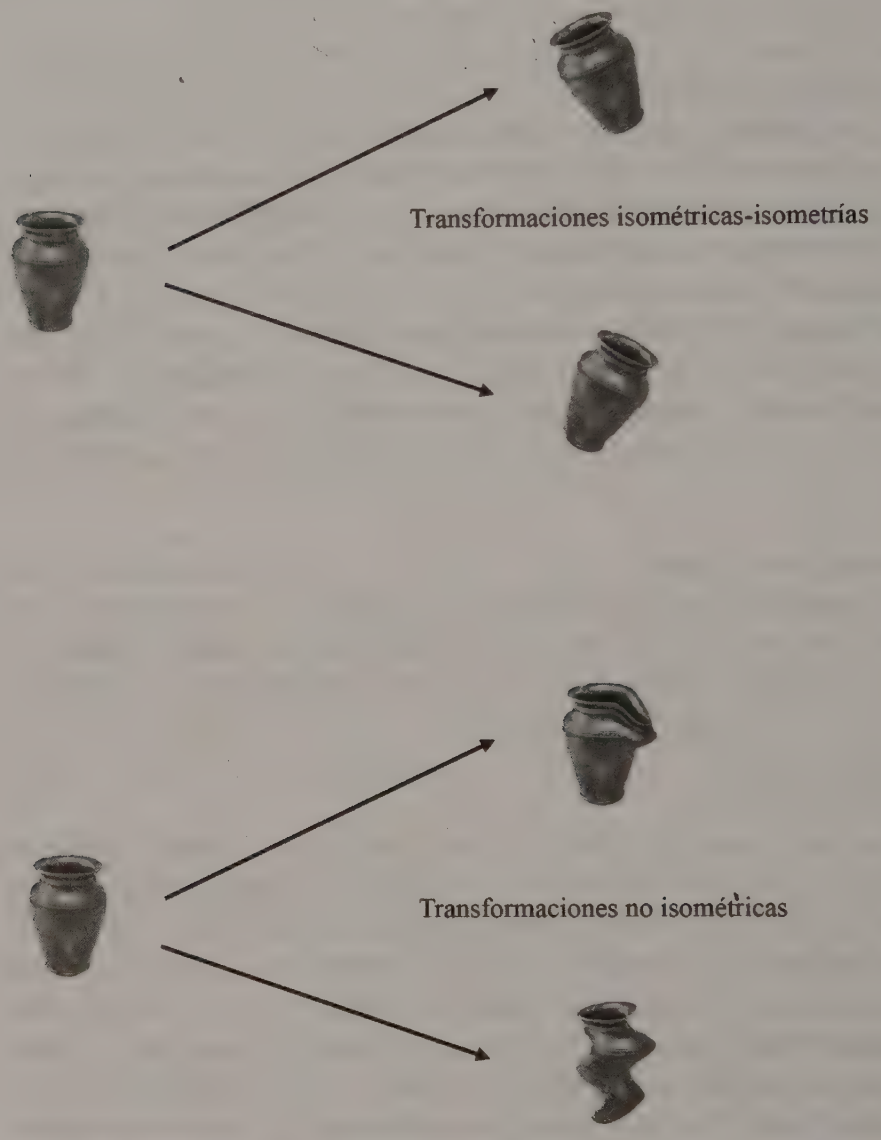


Figura 3.5. Transformaciones continuas de conjuntos de puntos.

Hay cuatro tipos básicos de isometrías, los cuales son ilustrados en la figura 3.6 para conjuntos de puntos del plano. En cada caso la preimagen es congruente con la imagen.

La isometría más simple es la *traslación*, a veces llamada también *desplazamiento*. En el plano, el conjunto de puntos de la preimagen se puede desplazar, sin rotación ni distorsión, a otra posición del plano. Una traslación horizontal de a unidades se denota $(x,y) \rightarrow (x+a,y)$, donde (x,y) es un punto arbitrario de la preimagen y $(x+a,y)$ es el punto al cual es mapeada. Una traslación vertical de b unidades se puede describir del mismo modo como $(x,y) \rightarrow (x,y+b)$. La traslación es hacia arriba si $b > 0$ y hacia abajo si $b < 0$. Se emplea una notación análoga para la traslación de conjuntos de puntos en el espacio tridimensional.

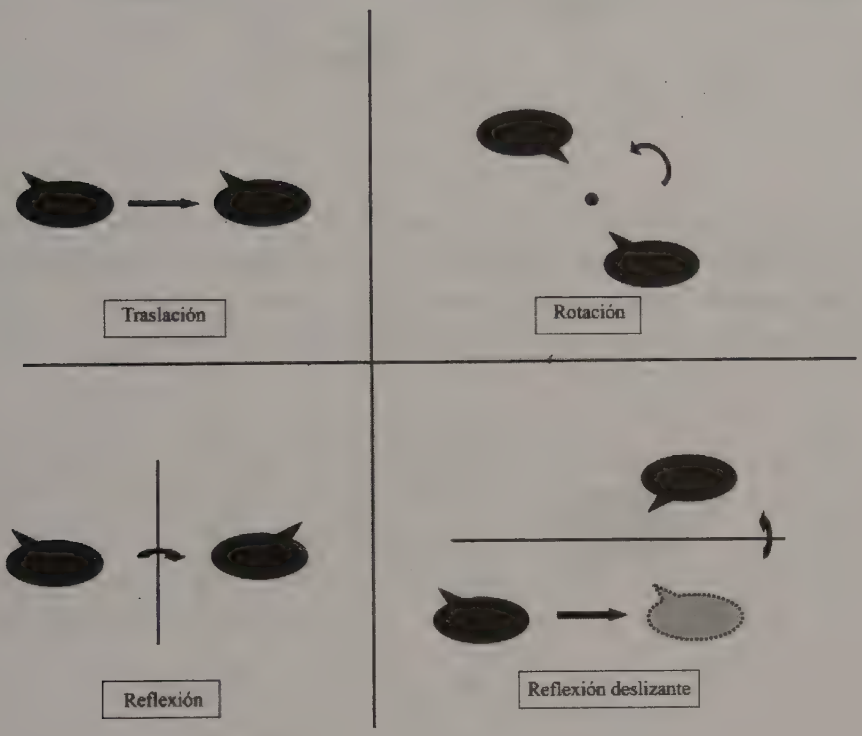


Figura 3.6. Isometrías fundamentales.

Las dos traslaciones simples ya descritas, al ser aplicadas consecutivamente, equivaldrán a una sola traslación oblicua $(x,y) \rightarrow (x+a, y+b)$. La traslación de una traslación es equivalente a una sola traslación. En tres dimensiones, si un punto (x, y, z) es trasladado primero por T_1 y luego por T_2, podemos describir la traslación combinada como $T_2[T_1(x, y, z)]$ o simplemente como $T_2T_1(x, y, z)$. A la traslación oblicua T_2T_1 se le llama producto de las traslaciones T_1 y T_2. Nótese el orden de los subíndices. La traslación T_2T_1 representa T_1 seguida de T_2 (figura 3.7).

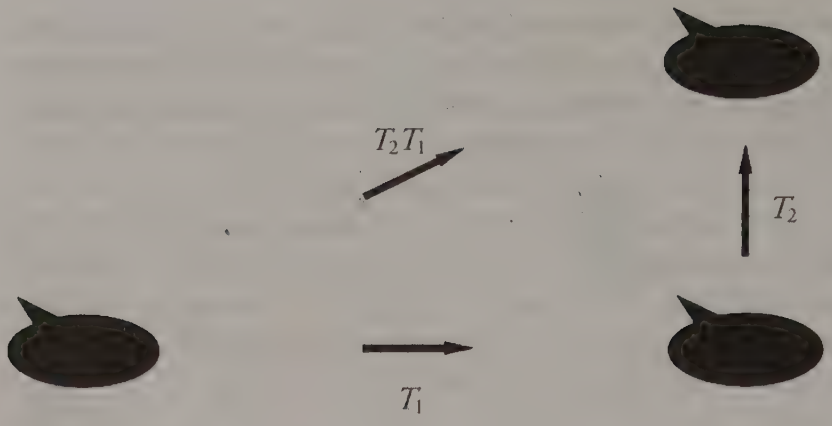


Figura 3.7. Producto de T_1 y T_2.

La *rotación* de un conjunto de puntos en el plano se especifica por un centro (punto fijo) C y un ángulo de rotación θ (figura 3.8). En el espacio tridimensional, el conjunto de puntos de la preimagen se hace rotar en torno de una línea recta (o eje) un ángulo especificado θ (figura 3.9).

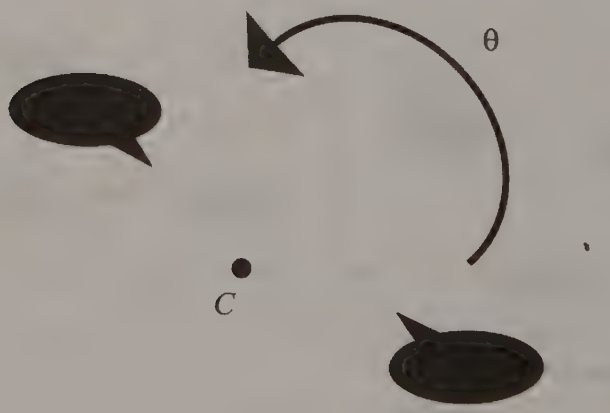


Figura 3.8. Rotación en el plano.

Las matemáticas necesarias para calcular la imagen de una rotación son un poco más complicadas que las requeridas por una traslación. El procedimiento es por multiplicación de matrices.

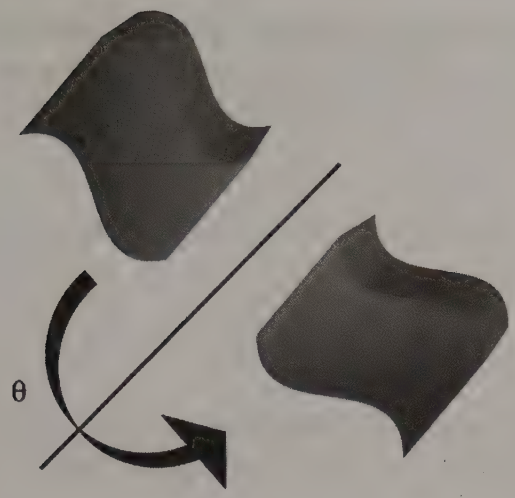


Figura 3.9. Rotación en el espacio.

Una *matriz* es una ordenación rectangular de números, por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix},$$

es una matriz de 3 x 2, que tiene tres filas y dos columnas. Un elemento específico de una matriz se indica con letras minúsculas y subíndices. Así, aquí a_{12} indica que el número que ocupa la primera fila y la segunda columna es 4. Del mismo modo, $a_{32} = 7$. En general una matriz m x n se puede escribir como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Si m = n tenemos entonces una matriz cuadrada. Si m = 1 tenemos una matriz fila (o vector) y si n = 1, una matriz columna (o también vector).

Hay varias operaciones relacionadas con matrices, pero aquí necesitamos únicamente la multiplicación de matrices, pues es la operación necesaria para calcular la rotación de conjuntos de puntos. Sea A una

matriz m x n y sea B una matriz n x q. Para formar el producto matriz AB será necesario que el número de columnas de A sea igual al de las filas de B. Sea $[a_1\ a_2\ \dots\ a_n]$ una fila típica de A y sea

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

una columna típica de B. El *producto interno* de esta fila y esta columna lo da $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \dots + a_nb_n$. Definamos ahora el producto AB de dos matrices.

El producto de dos matrices

Sea A una matriz m x n y sea B una matriz n x q. Entonces la matriz producto AB es la matriz m x q cuya entrada de la iésima fila y la jotaésima columna es el producto interno de la iésima fila de A y la jotaésima columna de B.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot4+3\cdot3 & 5\cdot0+3\cdot1 \\ -3\cdot4+2\cdot3 & -3\cdot0+2\cdot1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot10+5\cdot20 \\ 7\cdot10+9\cdot20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 130 \\ 250 \end{bmatrix}$$

Una rotación en torno del origen de un conjunto de puntos bidimensional en el plano se puede especificar por una matriz de 2 x 2. La matriz de rotación la da precisamente

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

donde es el ángulo de rotación medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Los lectores carentes de conocimientos de trigonometría no deben preocuparse, pues sólo necesitamos entender que las rotaciones en torno de (0,0) se pueden calcular por multiplicación de matrices.

Por ejemplo, una rotación de 90° aplicada al punto (1,0), produce

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que representa un punto imagen de (0,1). Una rotación de 45° de (1,0) da lugar a

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

que representa el punto imagen . $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

Se requiere de una matriz de 3 x 3 para definir la rotación de un punto tridimensional en torno de un eje (0,0,0). La trigonometría es técnica y la omitiremos aquí. Dos rotaciones especiales de esta clase se necesitan para la demostración del teorema de Banach-Tarski que nos aguarda en el capítulo 5. La primera es

$$\tau = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que representa una rotación de 120° en torno del eje de la x. Esta otra representa

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

una rotación de 180° en torno de la recta z = y en plano xz. Como con las traslaciones, podemos formar productos de rotaciones. La rotación seguida de la es equivalente a la sola rotación τ que se calcula como la matriz del producto σ y σ. (Recuérdese que τ se aplica primero y luego σ.)

La matriz de rotación de $\sigma\tau$ la da

$$\sigma\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Una sola matriz especifica una rotación con tal que el centro sea (0,0) en conjuntos de puntos del plano o el eje, una recta que pase por (0,0,0) en el caso de conjuntos tridimensionales de puntos. Otras rotaciones son más complicadas de calcular. Una opción sería la de utilizar una matriz de rotación como lo hemos hecho, para proseguir con la traslación adecuada hasta colocar la imagen en posición correcta.

Las *reflexiones* y las *reflexiones deslizantes* no se aplican al mover y reensamblar las piezas de la descomposición de Banach-Tarski. Sólo usaremos traslaciones y rotaciones. Sin embargo, la isometría de reflexión tiene propiedades dignas de ser mencionadas. La reflexión de un conjunto de puntos cambia sus orientaciones; por ejemplo, la imagen de un guante para la mano derecha es un guante para la mano izquierda. El movimiento asociado con una reflexión no se puede ejecutar dentro del espacio original. El conjunto de puntos debe pasar por un espacio de una dimensión mayor que la del espacio original. Por ejemplo, si deseamos reflejar un conjunto de puntos bidimensional en torno de una línea recta de su plano por medio de un movimiento rígido, debemos hacerlo girar en un espacio tridimensional y luego retornarlo al plano. Un conjunto de puntos bidimensional general no se puede reflejar por deslizamiento continuo alrededor del plano. Del mismo modo, si se desea reflejar un conjunto de puntos tridimensional dentro de un plano (espejo), ello no puede hacerse por medio de un movimiento rígido sin pasar por un espacio tetradimensional.

Tan peculiar isometría como parece ser la reflexión debe considerarse la "más" fundamental de las isometrías porque cualquiera de éstas ¡se puede definir en términos de las solas reflexiones! En el plano, por ejemplo, una traslación es el producto (aplicación consecutiva o secuencial) de dos reflexiones sobre líneas paralelas. Una rotación es el producto de dos reflexiones sobre rectas que se cortan. El centro de la rotación es la intersección de las rectas y el ángulo de rotación es dos veces la medida del ángulo no obtuso entre las rectas. Pese al hecho de que podríamos obtenerla con sólo reflexiones para describir isometrías, es mejor para

lo que nos ocupa pensar en términos de traslaciones y rotaciones. Las reflexiones son más difíciles de describir matemáticamente.

La colección de todas las isometrías posibles asociadas con un conjunto de puntos forma una estructura matemática conocida como *grupo*. Un grupo es una colección de objetos junto con una *operación binaria* que posee las propiedades de *cierre, asociatividad, identidad* e *inversa*. Cada propiedad se describe brevemente pues se relaciona con un grupo de isometrías.

En este caso, los objetos son isometrías y la operación binaria es la de la aplicación consecutiva. Cuando se combinan consecutivamente dos isometrías y se describen como un producto, obtenemos el equivalente de una sola isometría. Dado que las combinaciones de isometrías producen siempre isometrías se dice que el conjunto de isometrías es *cerrado* bajo la operación binaria de aplicación consecutiva.

La aplicación consecutiva es *asociativa*. Esto quiere decir que para cualesquiera tres isometrías ρ_1, ρ_2 y ρ_3, puede verificarse que

$$(\rho_1\ \rho_2)\ (\rho_3) = \rho_1\ (\rho_2\ \rho_3).$$

Hay una isometría especial, *I*, llamada isometría de *identidad*. Para esta isometría la imagen es idéntica a la preimagen. Es análoga a la multiplicación por uno o a la suma de cero dentro del conjunto de los números reales.

Cada isometría ρ está asociada con una isometría *inversa*, denotada por ρ^{-1}. Se trata sencillamente de una isometría y su inversa. Una destruye a la otra, o sea que $\rho\rho^{-1} = \rho^{-1}\rho = I$, la isometría de identidad. Nótese que $(\rho_1\rho_2) = \rho_2^{-1}\,\rho_1^{-1}$ ya que

$$(\rho_1\rho_2)(\rho^{-1}\rho^{-1}) = \rho_1(\rho_2\rho_2^{-1})\rho_1^{-1} = \rho_1 I \rho_1^{-1} = \rho_1\rho_1^{-1} = I$$

Del mismo modo, $(\rho_1\rho_{2\ldots}\rho_n)^{-1}\rho_{n-1}^{-1}\ldots\ \rho_1^{-1}$.

En general, la aplicación secuencial de isometrías es no conmutativa, o sea que $\rho_1\rho_2 \neq \rho_2\rho_1$. Cámbiese el orden de aplicación y se obtendrá una diferente isometría producto. Sería fácil demostrarlo matemáticamente, recurriendo al hecho de que la multiplicación de matrices es no conmutativa. Pero la figura 3.10 aclarará perfectamente el punto. Un dado solo con lados opuestos sombreados del mismo modo se hace rodar hacia delante ¼ de giro y luego a la derecha también ¼ de giro. Repítase el proceso pero invirtiendo el orden de las rotaciones. Los resultados serán diferentes.

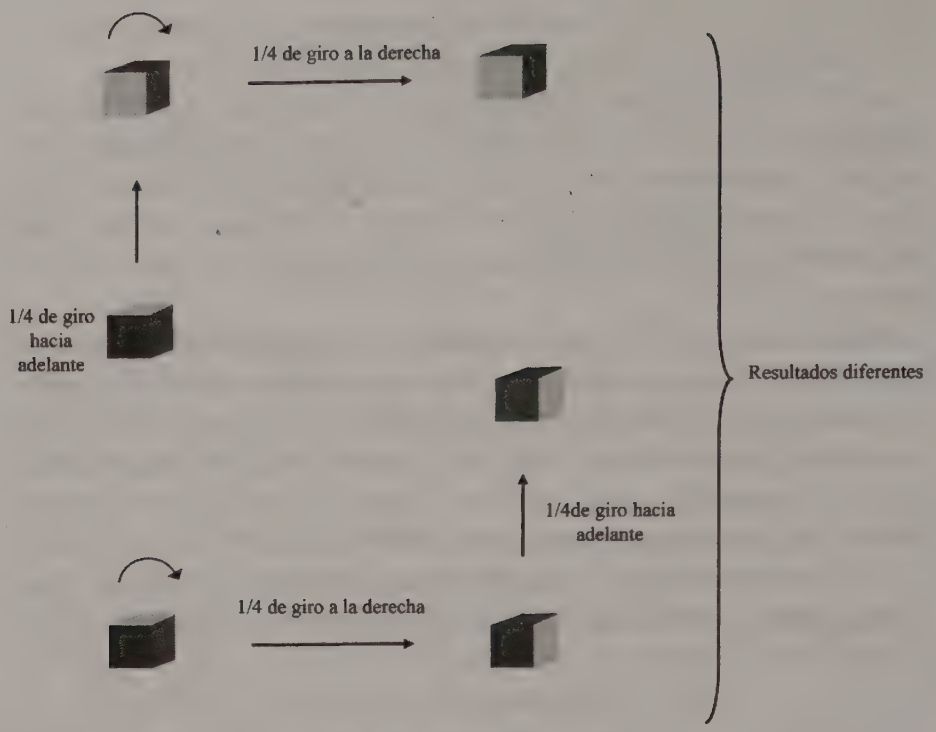


Figura 3.10. Los diferentes resultados de hacer rotar dos dados.

EQUIVALENCIAS DE DESCOMPOSICIÓN

Como esparcimientos las disecciones geométricas existen desde hace miles de años y de seguro el lector estará familiarizado con las muchas formas de estos rompecabezas.

El clásico rompecabezas de disección bidimensional suele implicar un polígono que es dividido por segmentos de rectas en un número finito de subregiones poligonales. Luego se reordenan las piezas valiéndose sólo de movimientos rígidos (isometrías) para formar algún otro polígono en particular. Si pasamos por alto las fronteras de las piezas podríamos decir que los dos polígonos son *congruentes sometidos a disección, cortes con tijeras (equivalencias de descomposición) o a manera de rompecabezas*. Las formas más generales que incluyen fronteras y cortes curvos permiten una amplia variedad de tales rompecabezas.

Para decirlo con precisión teórica: cuando se dividen conjuntos de puntos, debemos considerar que cada punto aislado de la región es dividido, incluso los de la frontera y los cortes. Se hará una revisión detallada de esta forma más precisa de descomposición y rearmado al final de este capítulo que versará sobre la equidescomponibilidad.

El famoso inventor de rompecabezas inglés Henry E. Dudeney (1857-1930) publicó lo que puede ser la disección más sencilla entre dos polígonos regulares. Si bien las piezas carecen de simetría, lo mínimo del conjunto (cuatro piezas) hace eficiente la construcción (figura 3.11).

Figura 3.11. Cuadrado a triángulo equilátero –cuatro piezas.

La simetría, cuando es posible, agrega el factor elegancia (figura 3.12).

Figura 3.12. Octágono a cuadrado –cinco piezas.

El autor de rompecabezas norteamericano Sam Loyd, mencionado en el capítulo 2, publicó varios rompecabezas de disección en la forma de elaborados dibujos (figura 3.13).

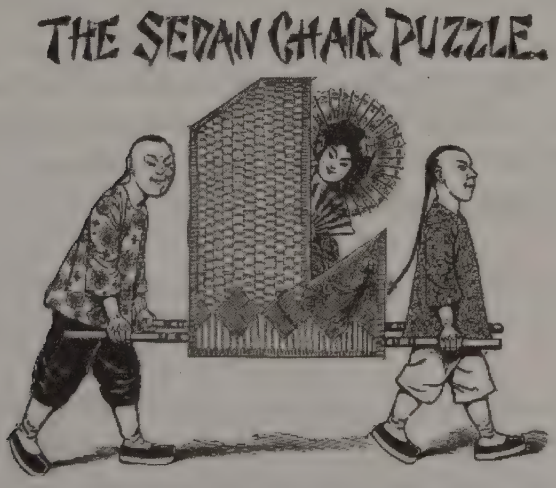


Figura 3.13. Rompecabezas de la silla de manos sedán, de Sam Loyd [Gardner 59, figura 11]. (Reimpreso con permiso de Dover Publications, Inc.).

Figura 3.14. Silla a cuadrado –dos piezas.

Se le pide al lector que se concrete a la silla y la convierta en una caja cubierta, cortando la forma en el número más pequeño de piezas que puedan rearmarse para formar un cuadrado perfecto (figura 3.14).

El antiguo rompecabezas chino, del Tangrama, puede encontrarse en la mayoría de las tiendas de juegos. El origen del Tangrama es confuso. Según Sam Loyd, fue inventado por el dios Tan hace más de 4 000 años, y cada una de las siete piezas corresponde respectivamente al Sol, a Marte, Júpiter, Saturno, Mercurio y Venus. Esta versión anecdótica posteriormente fue expuesta como engañifa histórica. La versión que se encuentra hoy en día en las tiendas consiste en un cuadrado de madera (o plástico) cortado en siete piezas: un cuadrado pequeño; dos triángulos rectángulos isósceles; un triángulo rectángulo isósceles de tamaño mediano; dos grandes triángulos rectángulos isósceles y un paralelogramo (figura 3.15).

Por movimientos rígidos las piezas pueden ser rearmadas para formar un increíble número de siluetas de animales, figuras y otros objetos comunes (figura 3.16).

El clásico rompecabezas bidimensional hecho por cortes requiere que un polígono regular sea cortado en un número finito de piezas y rearmado para formar otro polígono regular. ¿Es posible que cualquier polígono (regular o irregular) de área dada sea congruente por disección con cualquier otro polígono que tenga la misma área? El siguiente teorema da una respuesta afirmativa.

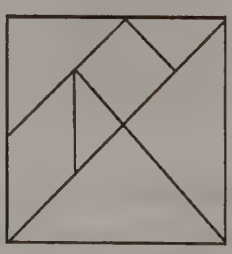


Figura 3.15. Tangrama –siete placas de sabiduría.

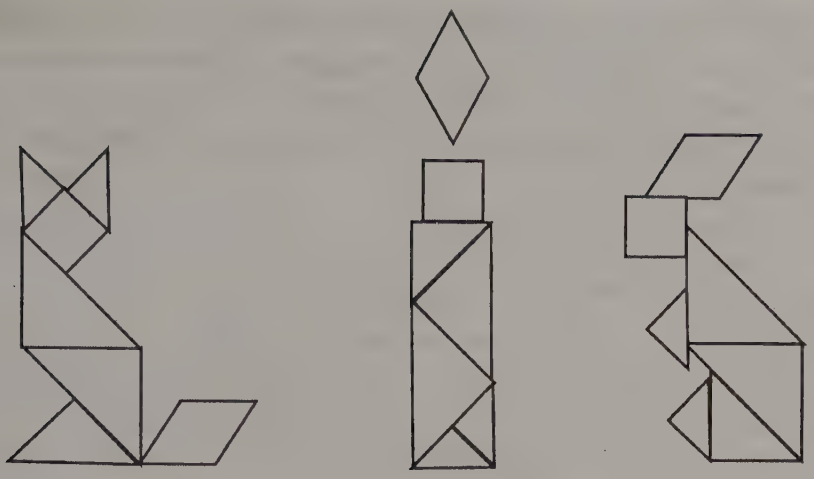


Figura 3.16. Figuras comunes del Tangrama.

Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien

Dos polígonos son congruentes por disección si y sólo si tienen la misma área. Específicamente, cualquier polígono es congruente por disección con un cuadrado de la misma área.

Demostración:

Es intuitivo que dos polígonos que son congruentes por disección tengan la misma área. La otra dirección de la demostración demanda que mostremos que dos polígonos de la misma área son congruentes por disección. Para tal fin necesitamos demostrar solamente que cualquier polígono es congruente por disección con un cuadrado de la misma área. Luego, para demostrar que dos polígonos de igual área son congruentes por disección sólo necesitamos considerar que cada uno puede ser cortado y rearmado para formar el mismo cuadrado. Superponiendo las dos disecciones del cuadrado solo, nos da una disección que transforma el primer polígono en el segundo.

Paso 1. Partición del polígono en un número finito de triángulos. (Una demostración de que existe tal clase de partición para un polígono dado aparece en Eves 63, p. 238.)

Paso 2. Córtese y reármese cada triángulo para formar un rectángulo, como se ve en la figura 3.17.

Paso 3. Córtese y reármese cada rectángulo para formar un cuadrado como se ilustra en la figura 3.18. Esto puede hacerse sólo si la longi-

tud no excede cuatro veces la anchura. Para un rectángulo de longitud excesiva córtese en dos y superpóngase como sea necesario antes de convertirlo en un cuadrado (figura 3.19).

Paso 4. Córtense y reármense dos cuadrados para formar uno solo (figura 3.20).

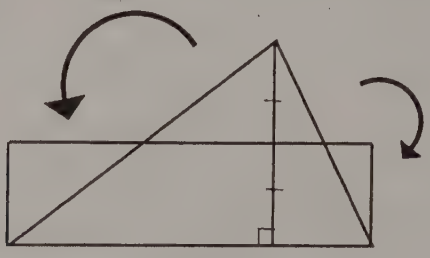


Figura 3.17. Triángulo a rectángulo.[9]

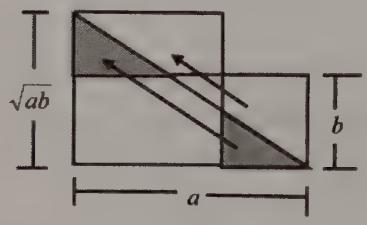


Figura 3.18. Rectángulo a cuadrado.

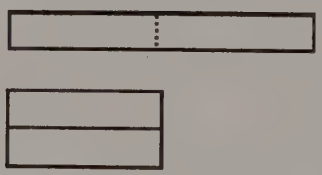


Figura 3.19. Corte y apile según sea necesario.

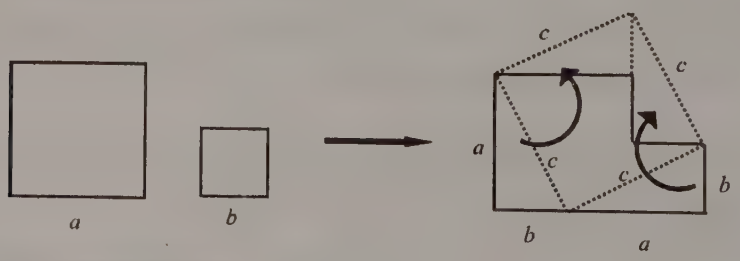


Figura 3.20. Dos cuadrados a uno.

---

[9] Las figuras 3.17 a 3.20 están reimpresas con autorización de la Cambridge University Press.

Con la aplicación repetida del paso 4 se arman todos los cuadrados y se forma un solo cuadrado, como se pidió.

El concepto de disección tiene aplicabilidad matemática también. Por ejemplo, el paso 4, de arriba, es una *demostración* del teorema de Pitágoras ($c^2 = a^2 + b^2$). En cálculo integral se usan disecciones de figuras para encontrar longitudes, áreas y volúmenes, determinando el límite por una serie de aproximaciones sucesivas. Por ejemplo, se pueden hacer aproximaciones al área de un círculo, con cualquier grado de exactitud, por el área de un polígono inscrito de n lados. El área del polígono de n lados se encuentra cortando la región delimitada por el polígono en n triángulos congruentes y sumando las áreas de los triángulos. La aproximación mejora conforme aumenta el número de lados n. Si el círculo es un círculo unidad (de radio uno) entonces, usando el hecho de que $A = \pi r^2 = \pi.1 = \pi$, podremos aproximarnos a con cualquier grado deseado de precisión.

Las aproximaciones sucesivas se muestran en la figura 3.21 para n = 3, 4 y 5.

Usando la fórmula trigonométrica

$$A_n = n \cos\frac{\pi}{n} sen\frac{\pi}{n}$$

para el área de un polígono regular de n lados inscrito en un círculo unitario, podríamos aproximar el área del círculo (π) con tantos decimales como deseemos. Por ejemplo, para n = 1000 tenemos un área de 3.1415719... que difiere del valor verdadero de π en menos de 0.0001.

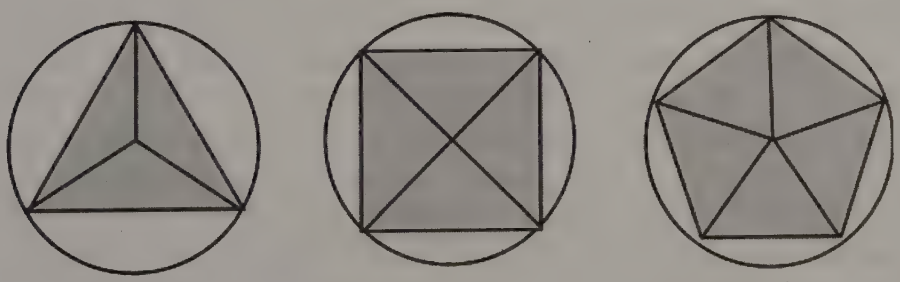


Figura 3.21. Aproximaciones para n = 3, 4 y 5.

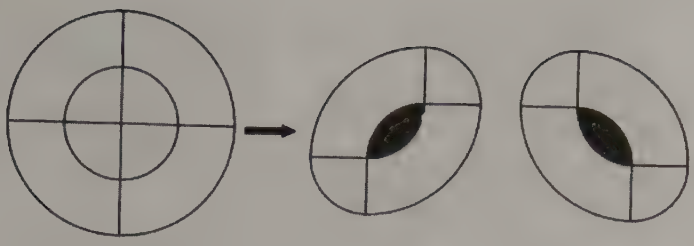
En la tabla que sigue se da A_n para algunos valores grandes de n junto con el error al usar A_n como aproximación de π.

n	A_n	$\lvert\pi - A_n\rvert$
100	3.139525976	<0.01
1,000	3.141571983	<0.0001
10,000	3.141592447	<0.000001
100,000	3.141592652	<0.00000001
1,000,000	3.141592654	<0.0000000001

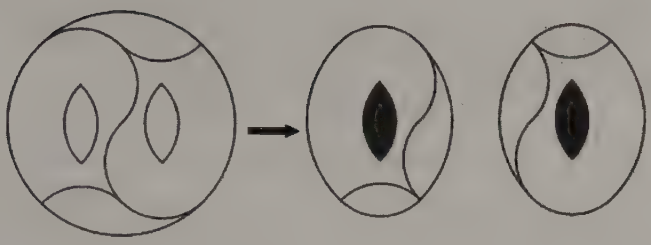
Las longitudes de arco, las áreas de superficies y los volúmenes se pueden aproximar por métodos semejantes. Las aproximaciones se encuentran por corte y suma. La suma deseada, ya sea la longitud de un arco, el área de una superficie o el volumen se definen como el valor límite de estas aproximaciones de exactitud creciente.

Si permitimos curvas no lineales (no rectilíneas) como fronteras de disecciones bidimensionales, entonces debemos establecer las reglas del juego antes de proceder. ¿Qué curvas son admisibles? El círculo es una elección natural debido a su simetría, pero no hay reglas rigurosas y rápidas.

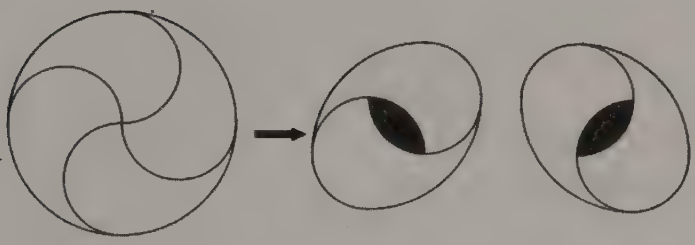
Dissections: Plane and Fancy de Greg N. Frederickson es una colección clásica de disecciones tanto bidimensionales como tridimensionales, algunas con fronteras curvas. Según Frederickson (Frederickson 97, pp. 163-165), la siguiente disección del tablero de una mesa circular (disco), hecha por John Jackson en 1821, puede ser la disección más antigua de una figura curva. Se corta el disco en ocho piezas y se rearma para formar dos banquillos ovalados, con asideros en el centro de cada uno. De modo muy parecido al otrora popular programa de TV *Adivine el nombre de la canción*, en el cual los concursantes trataban de identificar una melodía escuchando el menor número de notas, así también los inventores de rompecabezas trataron de superarse unos a otros haciendo una disección especificada usando el mínimo de piezas. Loyd hizo la disección *Disc to Ovals* [Disco a óvalos] usando sólo seis piezas. En 1927, Dudeney publicó una disección con cuatro piezas, dándole crédito a Loyd. Todas las disecciones de disco a óvalo se hacen con cortes circulares. (Véase figura 3.22.)



Disco a óvalos: ocho piezas



Disco a óvalos: seis piezas



Disco a óvalos: cuatro piezas

Figura 3.22. Disco a óvalos.

Como con las disecciones poligonales, tanto Lloyd como Dudeney popularizaron la disección de fronteras curvas en los periódicos y revistas de fines del siglo XIX y principios del XX (figura 3.23).

Loyd pide al lector que corte la espada en tres piezas y la rearme para formar un corazón (figura 3.24).

La solución, como la dio a conocer Loyd, es algo peculiar con respecto a la forma redondeada de la parte inferior del corazón. Sería de esperarse más bien una cúspide.

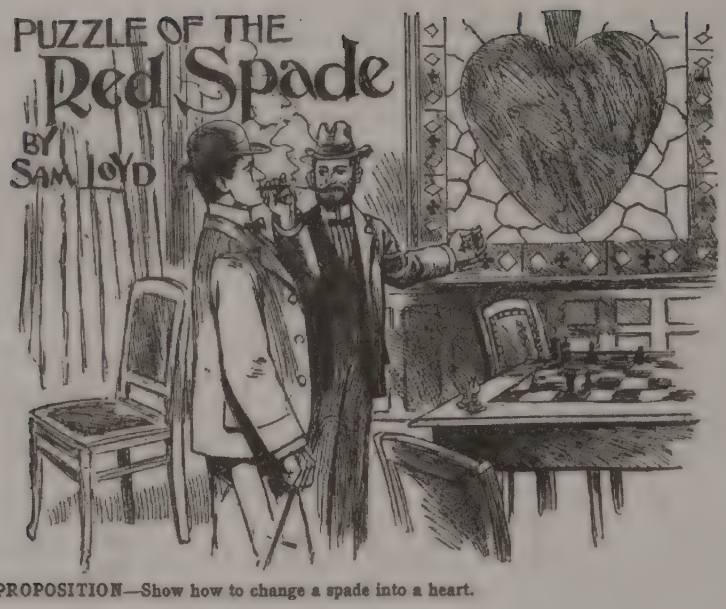


Figura 3.23. Rompecabezas de espada a corazón [Sam Loyd Gardner 59, figura 59]. (Reimpreso con autorización de Dover Publications, Inc.)

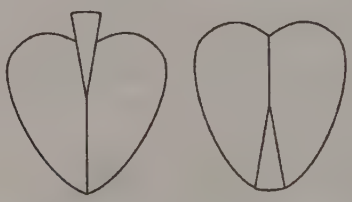


Figura 3.24. Espada a corazón –tres piezas.

En 1925, Alfred Tarski planteó su famoso problema de cuadrar el círculo preguntando si sería posible cortar el interior de un círculo (disco) en un número finito de piezas y reorganizarlas por isometrías para formar un cuadrado de la misma área. Dubins, Hirsh y Karush (Dubins, Hirsch y Karush 63) demostraron que eso es imposible si la disección se restringía a equivalencias de descomposición. En 1990, Miklos Laczkovich, de Budapest, Hungría, demostró (Laczkovich 90) que en realidad podría hacerse mediante una técnica más precisa descrita en la siguiente sección sobre equidescomponibilidad. Demostró asimismo que se podía hacer mediante puras traslaciones. La disección propuesta por Laczkovich usa el Axioma de elección; por tanto, las piezas no se definen explícitamente. Laczkovich estima que hacen falta aproximadamente ¡10^{50} piezas! (Véase figura 3.25.)

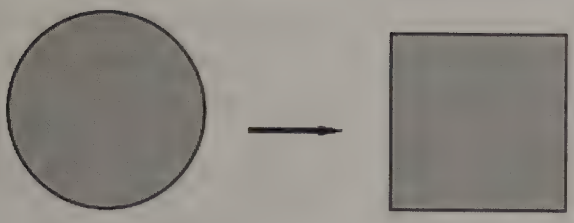


Figura 3.25. Disco a cuadrado –10^{50} piezas.

El problema de la cuadratura del círculo, de Alfred Tarski, no debe confundirse con el problema clásico de las matemáticas griegas de *cuadrar el círculo* o la *cuadratura del círculo*. Para el problema griego de la cuadratura del círculo se tiene que construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado exclusivamente con una regla y un compás. En 1880 Ferdinand Lindeman (1852-1939) demostró que tal construcción era imposible al comprobar que π era un número trascendente y no algebraico. Dado un círculo de radio uno, será imposible construir un cuadrado de la misma área que el círculo. El área del cuadrado debe ser igual a π y cada una de sus aristas $\sqrt{\pi}$. Empezando con un segmento de recta (el radio) de longitud uno, es imposible construir, con sólo una regla y un compás, un segmento de recta de longitud trascendente. El hecho de que π sea trascendente implica que $\sqrt{\pi}$ es también trascendente y, por tanto, la construcción es imposible.

Las disecciones más simples de conjuntos de puntos tridimensionales son las disecciones de poliedros. El libro de Stewart T. Coffin, *The Puzzling World of Polyedral Dissections* [El mundo de las disecciones de poliedros] (Coffin 98), es una soberbia colección de tales rompecabezas. El libro, por cierto, está disponible ahora gratuitamente en www.johnrausch.com/PuzzleWorld. Las disecciones simples de un cubo de 3 x 3 x 3 se muestran en las figuras 3.26, 3.27 y 3.28.

La versión 1 (figura 3.26) es inusual en el sentido de que todas las piezas son planas y el volumen de las piezas aumenta en progresión aritmética. Armarlo es relativamente fácil.

La versión 2 (figura 3.27), llamada cubo de Mikusinski, en honor a su inventor, J. G. Mikusinski, es algo más difícil de armar.

La disección en siete piezas de la versión 3 (figura 3.28) se conoce como Cubo de Soma y se encuentra en todas partes en tiendas de juegos y rompecabezas. Ideado por el poeta e inventor danés Piet Hein, fue puesto en venta por Parker Brothers, Inc. en 1969 y lo popularizó Martin

Gardner. Es fácil de armar pues existe más de un millón de modos posibles de formar el cubo. Como el Tangrama bidimensional, se pueden formar muchas otras figuras tridimensionales usando las siete piezas. (Figura 3.29 a, b y c.)

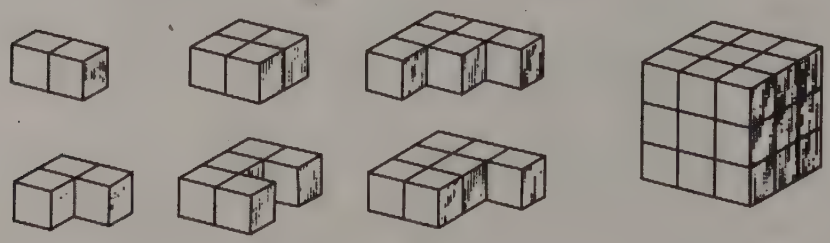


Figura 3.26. Disección del cubo-versión 1.[10]

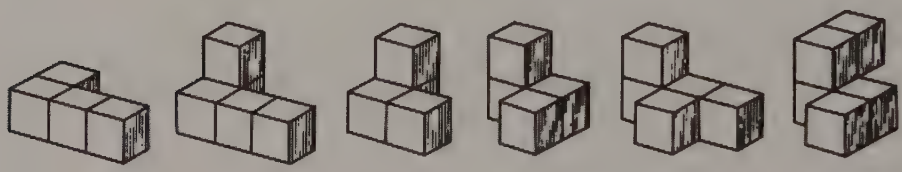


Figura 3.27. Disección del cubo-versión 2.

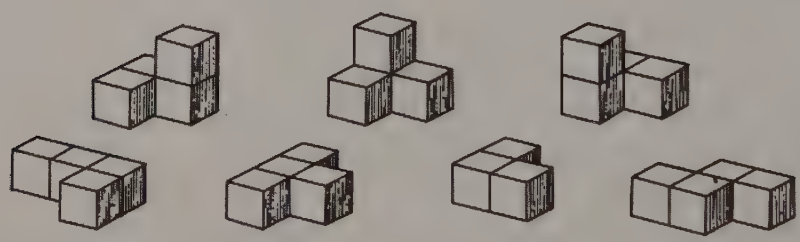
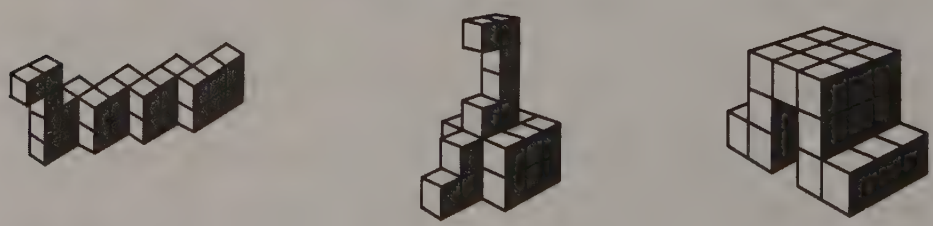


Figura 3.28. Disección del cubo-versión 3.



a. serpiente b. horca c. túnel

Figura 3.29. Formas Soma comunes.

[10] Las figuras 3.26 a 3.28 están reimpresas con autorización de Stewart T. Coffin

Algunas de la interminable variedad de disecciones tridimensionales aparecen en la foto de la figura 3.30, tomada del libro de Coffin.

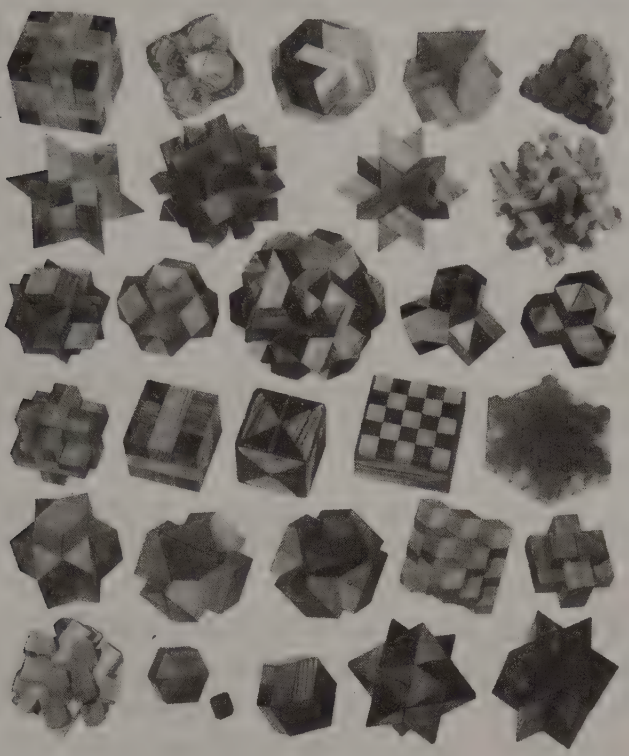


Figura 3.30. Rompecabezas de disección de poliedros. (Reimpreso con autorización de Stewart T. Coffin.)

Es natural preguntarse, y Hilbert lo hizo, si hay una analogía tridimensional del teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien. ¿Puede demostrarse que cualesquiera dos poliedros de volumen igual son congruentes por disección? Hilbert sospechaba que no. Como tercer problema de su famosa lista, pidió que se demostrara que existen dos tetraedros de bases y alturas iguales que no son congruentes por disección.

El matemático alemán Max Dehn, de veintidós años de edad, resolvió el problema antes de que Hilbert presentara su lista en París; fue, por tanto, el primero de la lista en ser resuelto. Como Hilbert intuía, Dehn confirmó que en general los poliedros de volúmenes iguales no son congruentes por disección. Su idea fue la de asignar un número, el invariante de Dehn, a un poliedro, basándose en las longitudes de las aristas y el ángulo entre las caras. Ninguna cantidad de deslizamientos y cortes podría cambiar este número para un poliedro dado. Entonces, si dos

poliedros (de volúmenes iguales) tenían diferentes invariantes de Dehn, no serían congruentes por disección. Dehn construyó dos tetraedros de volúmenes iguales pero diferentes invariantes de Dehn, confirmando así la imposibilidad de congruencia por disección (figura 3.31).

Figura 3.31. Dos tetraedros con áreas de sus bases, alturas y volúmenes iguales, que tienen diferentes invariantes Dehn [Yandell 02, p. 119]. (Reimpreso con autorización de A. K. Peters, Ltd.).

Si, en general, dos poliedros de volúmenes iguales no son congruentes por disección, ¿cómo sería posible demostrar, como lo garantiza el teorema de Banach-Tarski, que un sólido de una forma y volumen dados puede ser dividido y rearmado para formar un sólido de alguna otra forma o volumen o ambas cosas? La solución al tercer problema de Hilbert, ¿no contradice el teorema de Banach-Tarski? Naturalmente no debe contradecirla. En primer lugar, el tercer problema de Hilbert exige que los poliedros sean cortados por planos en piezas poliédricas (equivalencias de descomposición), sin permitir ninguna otra clase de cortes ni de piezas. Lo que es más: la naturaleza precisa de la disección de puntos todavía no ha sido dirigida, pues debemos tomar en cuenta todos y cada uno de los puntos del conjunto, incluidas las aristas y las fronteras. Lo extraño es que esta misma precisión es lo que permite la magia del teorema de Banach-Tarski.

EQUIDESCOMPONIBILIDAD

Hemos sido algo caballerosos en las disecciones de conjuntos de puntos examinadas en la sección anterior. Téngase presente que los conjuntos de puntos son sólo eso: conjuntos de puntos. De ahí que debamos prestar cuidadosa atención a todos y cada uno de los puntos del conjunto por disecar, incluidas las aristas y las fronteras. Las disecciones recreativas suelen pasar por alto tales condiciones, pero la precisión matemática requiere de atención cuidadosa.

Considérese el problema de disecar un cuadrado unidad (interior y frontera) en un número finito de piezas y formar un triángulo rectángulo isósceles. Como disección de rompecabezas es trivial y se puede hacer en sólo dos piezas (figura 3.32).

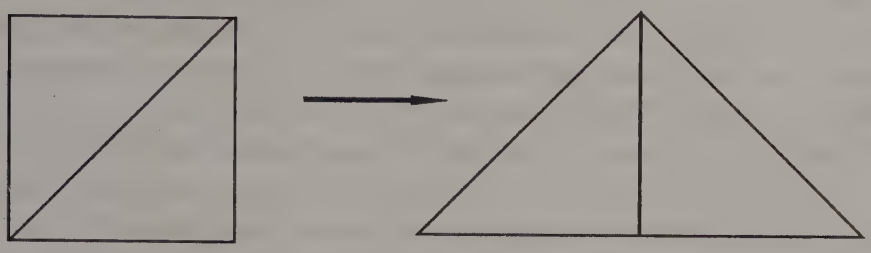


Figura 3.32. Cuadrado a triángulo rectángulo isósceles –dos piezas.

Pero para ser matemáticamente precisos debemos contestar lo siguiente:

1. ¿A qué pieza asignamos los puntos a lo largo del corte diagonal del cuadrado? La diagonal sólo puede usarse para una de las hipotenusas de las dos piezas triangulares.
2. Cuando las dos piezas triangulares son empalmadas para formar el triángulo rectángulo grande, ¿qué está ocurriendo en la junta? Al parecer se empalman dos aristas del cuadrado de la izquierda. ¿Se pierden puntos durante el proceso?

Si no podemos contestar satisfactoriamente estas preguntas, entonces no podremos transformar el cuadrado en el triángulo rectángulo isósceles de tal modo que haya una correspondencia biunívoca entre los puntos del cuadrado y los del triángulo rectángulo. Como veremos, es posible transformar el cuadrado en el triángulo rectángulo isósceles por disección finita, tomando en cuenta todos los puntos. Decimos que el cuadrado y el triángulo rectángulo isósceles son *equidescomponibles* o *congruentes pieza por pieza*. Lo cual significa que se puede descomponer uno en un número finito de piezas y rearmarlo para formar el otro, *tomando en cuenta todos los puntos incluidos en los bordes y las fronteras.*

Piénsese en la equidescomponibilidad como una forma más precisa de congruencia por disección.

Para aclarar perfectamente el fenómeno de la equidescomponibilidad, empecemos por considerar conjuntos de puntos sobre la recta

de los números reales. Los conjuntos de puntos {1, 2, 3...} y {3, 4, 5} son congruentes porque el primero puede ser desplazado a la derecha dos unidades (una isometría) y hacerlo coincidir con el segundo. Por comparación, el conjunto de puntos {1, 2, 3...} no es congruente con el conjunto de puntos {2, 4, 6}. La distancia entre los puntos adyacentes de los dos conjuntos difiere en un factor de dos y el primero no puede desplazarse para que coincida con el segundo. Los dos conjuntos tienen la misma cardinalidad $\aleph_0$ pero no son congruentes.

Consideremos ahora los siguientes dos conjuntos de puntos: {1, 2, 3...} y {1, 2, 3} ∪ {5, 6, 7...}. Así, puede pensarse el primer conjunto como puntos sobre la recta numérica en todo número natural y el segundo conjunto de puntos es el mismo, salvo por un *hoyo* en 4. Los dos conjuntos no son congruentes (figura 3.33).

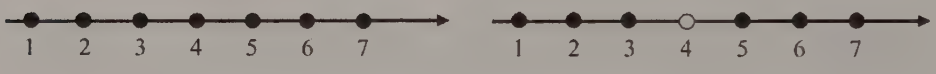


Figura 3.33. Dos conjuntos de puntos equidescomponibles.

Sin embargo, los dos conjuntos de puntos son equidescomponibles. Si el conjunto de la derecha se descompone en dos conjuntos {1, 2, 3} y {5, 6, 7}, entonces el conjunto {5, 6, 7} puede desplazarse a la izquierda una unidad, para llenar el hoyo que está en 4 y formar el conjunto {1, 2, 3,...}. Se le puede llamar a esta acción *desplazamiento desde el infinito*. De modo equivalente, podríamos empezar con el conjunto de la izquierda {1, 2, 3,...} y dividirlo en los dos conjuntos {1, 2, 3} y {4, 5, 6,...}. Entonces el conjunto {4, 5, 6,...} puede desplazarse a la derecha una unidad formando el conjunto {5, 6, 7,...}. A esto le llamamos *desplazamiento hacia el infinito* y decimos que el 4 fue *absorbido* en el proceso. Esto crea un hoyo en 4.

Para esclarecer el concepto de absorción por desplazamiento hacia el infinito volvemos al cuento de David Hilbert, referido tan a menudo, del *Hotel de Hilbert* –el hotel con un número infinito de habitaciones–. El hotel está lleno y un viajero llega al mostrador y pide un cuarto. El propietario resuelve el problema desplazando a todos los huéspedes un cuarto hacia arriba (hasta el infinito). De este modo el huésped que ocupaba el cuarto 1 pasa al cuarto 2, éste al 3 y así sucesivamente. El proceso deja libre el cuarto 1, y el viajero que espera es absorbido como huésped.

Aun cuando llegara al hotel completamente lleno un número infinito de presuntos huéspedes, siempre sería posible acomodarlos. El propietario cambia al huésped del cuarto 1 al número 2; al del número 2 al número 4; al del número 3 al número 6; al del número 4, al 8, y así sucesivamente. Ahora están libres todos los cuartos con número impar y se puede acomodar al número infinito de nuevos huéspedes.

Lawrence M. Lesser de la Universidad de Texas, El Paso, adaptó el concepto como una parodia de la canción de Las Águilas, "Hotel California" (Don Felder, Don Henley, Glen Frey). Le llamó "Hotel Infinito". (Léase en la siguiente página.)

Las ideas anteriores de desplazarse al infinito y de absorción son empleadas ahora para demostrar que un círculo es equidescomponible para obtener un círculo del mismo radio con un punto eliminado. ¡Puede hacerse con dos piezas (figura 3.34)!

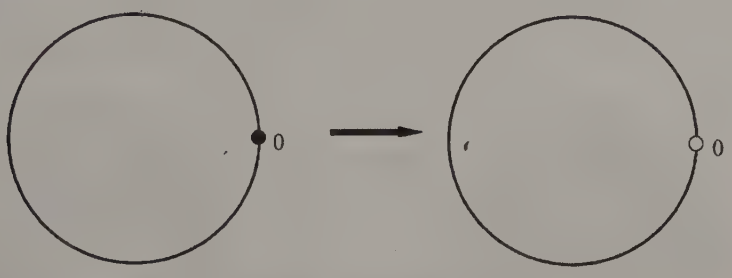


Figura 3.34. Círculo a círculo al que falta un punto –dos piezas.

Sea cada uno de los círculos de radio 1. Empezando con el círculo a la izquierda, desígnese con 0 el punto por ser eliminado. Viájese una distancia de una unidad, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, desde 0 y márquese como 1. Viájese otra unidad en sentido contrario al de las manecillas del reloj y llámesele 2. Continúe de esta manera. Los primeros puntos designados así se muestran en la figura 3.35.

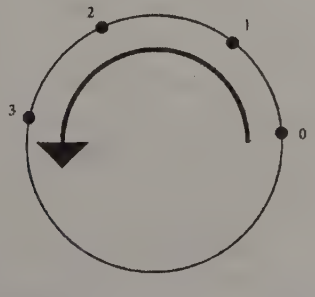


Figura 3.35. Desplazamiento al infinito.

Hotel infinito

Derechos de autor Lawrence M. Lesser
Todos los derechos reservados
Reimpreso con autorización

Es en una autopista de un oscuro desierto –sin mucho paisaje,
salvo este gran hotel que se alarga tan lejos como puede verse.
El anuncio de neón al frente advierte: "No hay cuartos vacíos".
Pero se me había hecho tarde y estaba cansado. Así que entré a suplicar.
El empleado dijo: "No hay problema. Haremos lo siguiente:
Pasaremos a los que están en un cuarto al inmediato superior.
Así quedará libre el primer cuarto y usted lo ocupará".
Traté de entender lo que acababa de oír.

Coro: "Bienvenido al HOTEL INFINITO,
donde cada cuarto está lleno (cada cuarto está lleno),
sin embargo hay cupo para más.
Sí, hay cuartos de sobra en el HOTEL INFINITO:
Páselos abajo (páselos abajo)
para dar cabida a otros más".

Acababa de ser alojado, al fin desempaqué,
cuando vi otros 8 coches entrar por la puerta trasera.
Me tuve que pasar al cuarto 9; otros subieron 8 cuartos también.
¡Nunca más confundiré un hotel Hilton con otro de Hilbert!
Mi mente se retorció cuando vi un autobús sin fin,
con un número infinito de viajeros entrando a registrarse.
"Calma", dijo el empleado nocturno, "vea lo que haremos:
Cámbiese al cuarto que tenga el número doble del que ahora tiene:
así quedarán libres los cuartos con números impares".

Coro: (se repite).

Lo último que recuerdo al final de mi estancia
es que era hora de pagar la cuenta, pero carecía yo de medios para ello.
El hombre del cuarto 19 sonrió: "Su cuenta la pagaré yo.
El del 20 pagará la mía, y así sucesivamente; así que para usted
¡la estancia fue gratuita!"

Considerando que la circunferencia del círculo es irracional (2π), podríamos continuar de esta manera marcando puntos alrededor del círculo *ad infinitum* sin que nunca coincidan dos puntos.

Llámesele A al conjunto de tales puntos. Es decir, A = {0, 1, 2, 3,...}. Sea B el conjunto de todos los puntos sobre la circunferencia que no están en A. Podemos considerar, pues, que el círculo completo es la unión de A y B. Hagamos rotar ahora todos los puntos de A un paso en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Así, 0 se mueve a 1, 1 se mueve a 2, 2 a 3, etc. Estamos desplazando A un paso de modo infinito y dejando sin cambios a B. Al hacerlo así, estamos dejando vacante el punto 0 porque éste está siendo absorbido en el círculo. Después del desplazamiento, nos quedamos con el círculo al cual se le ha quitado un punto. De modo equivalente, podemos empezar con el círculo de la derecha y desplazarlo al infinito para tapar el hoyo.

Asimismo, mostramos que un disco es equidescomponible a un disco al que le falte un segmento de recta (figura 3.36).

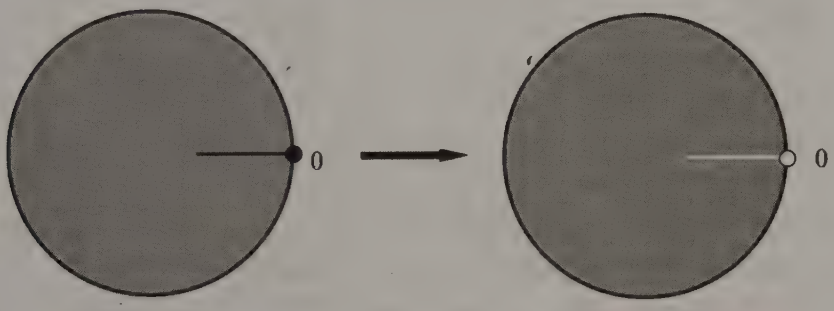


Figura 3.36. Disco a disco con pérdida de un segmento de recta –dos piezas.

Es mejor para nuestros fines suponer que el segmento tiene sólo un punto final o extremo. Con un desplazamiento al infinito se muestra que el segmento de recta del disco de la izquierda es absorbido. El razonamiento es idéntico al aplicado al círculo al que le falta un punto. O, empezando en el disco de la derecha, podemos mediante un desplazamiento desde el infinito llenar el hueco (figura 3.37).

Regresemos ahora a nuestro problema original de mostrar que un cuadrado es equidescomponible en un triángulo rectángulo isósceles de la misma área.

Se corta diagonalmente el cuadrado, bajo el supuesto de que todos los puntos que están sobre la diagonal pertenecen a la pieza superior izquierda, como lo indican las líneas continua y de puntos.

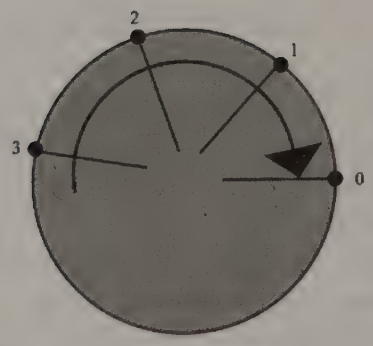


Figura 3.37. Desplazamiento desde el infinito.

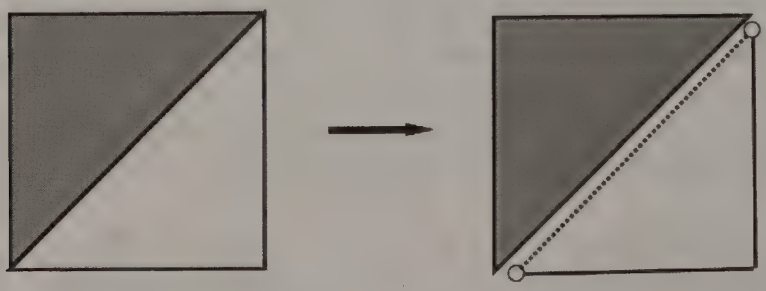


Figura 3.38. Primer corte.

Los pequeños dos triángulos rectángulos se juntan como se muestra, para formar el gran triángulo rectángulo isósceles (figura 3.39).

Desgraciadamente ahora se nos presentan dos problemas obvios. Sólo uno de los segmentos de recta verticales de la figura 3.39 puede servir de altura del triángulo rectángulo isósceles. Nos falta también el lado izquierdo superior del triángulo. Un remedio parcial consistiría en mover uno de los dos candidatos a altura, digamos, el de la derecha, a la posición del lado faltante tal y como se muestra. Luego, los dos pequeños triángulos rectángulos podrían acoplarse sin colocar puntos encima de los puntos. Terminaremos con la figura 3.40.

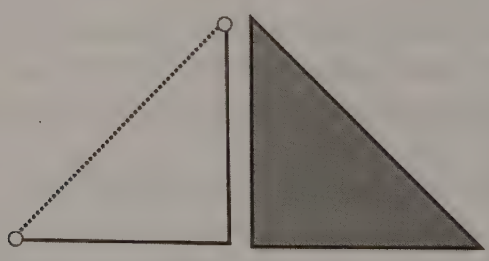


Figura 3.39. Formando el triángulo rectángulo isósceles.

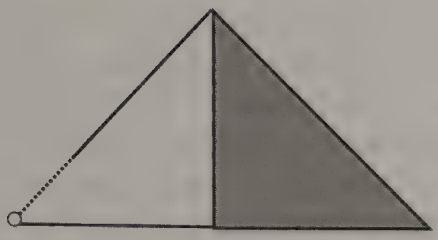


Figura 3.40. Triángulo rectángulos isósceles... ¡casi!

Nos está faltando un conjunto de puntos que forme el segmento de recta con un punto final. Como el cuadrado original tenía longitud 1, la longitud del segmento faltante sería $\sqrt{2}$-1, o sea, 0.4 aproximadamente.

¡Parece ser una cantidad tan insignificante! Y lo malo es que podemos sencillamente removerlo del cuadrado original e insertarlo en donde se necesita, en el lado del triángulo rectángulo isósceles. Seguramente así ya no faltaría, ¿correcto? En realidad ya no faltaría ¡y esto es exactamente lo que vamos a hacer! Si lo removemos del interior del cuadrado original como se ve en la figura 3.41, entonces habremos originado una fisura. Pero ésta será sólo temporal, pues podemos llenarla por el proceso de desplazamiento desde el infinito, descrito antes. Podríamos inscribir un círculo dentro del cuadrado original y remover nuestro segmento de recta de longitud $\sqrt{2}$-1, como se muestra. Podríamos llenar la brecha como lo hicimos antes.

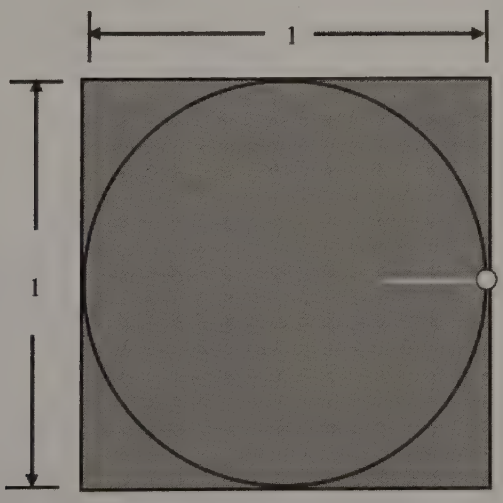


Figura 3.41. Llenando la brecha por desplazamiento desde el infinito.

De aquí en adelante, seremos precisos en nuestras disecciones y rearmados, tomando en cuenta cada punto último del conjunto de puntos original y procurando que los puntos no se superpongan al reensamblar las piezas. Lo que deseamos es equidescomponibilidad, no sólo la equivalencia de descomposición. Como vimos, estos dos tipos de congruencias pieza por pieza no son equivalentes. Equidescomponibilidad no implica equivalencia de descomposición, pues ya vimos que un disco (circular) es equidescomponible en un cuadrado de la misma área, pero los dos conjuntos no son congruentes por equivalencia de descomposición. Sin embargo, también es cierta la implicación inversa. La equivalencia de descomposición implica equidescomponibilidad ya que las fronteras (bordes) de las piezas pueden ser absorbidas al reensamblarlas. Y esto se aplica también a los conjuntos de puntos tridimensionales. El teorema de Banach-Tarski garantiza que cualesquiera dos poliedros, de igual o diferente volumen, sean equidescomponibles. Sin embargo, incluso los poliedros cuyos volúmenes son iguales no necesitan ser congruentes por equivalencia de descomposición, como es el caso de los tetraedros del tercer problema de Hilbert.

.4.

HACIA LA PARADOJA DE BANACH-TARSKI

A la paradoja le gusta la contradicción con salidas.
MASON COOLEY

¡La paradoja engendra la paradoja!

George Cantor definió un conjunto infinito como aquél que se podría poner en correspondencia biunívoca con un subconjunto propio de sí mismo. A muchos les pareció que su definición contradecía la noción euclidiana común de que el todo es mayor que la parte. Si la definición misma de infinito es paradójica, ¿por qué vamos a asombrarnos de que se gesten más paradojas en las entrañas de los conjuntos infinitos? Ejemplos notables, descritos en los dos capítulos anteriores, son la paradoja de Burali-Forti, la de Cantor y la de Russell. Presentaremos otras más en este capítulo.

Las paradojas de este tipo son del Tipo 1, que parecen ser contradictorias, absurdas incluso, y, sin embargo, son en realidad verdaderas. No las confundamos con las de Tipo 2, que son embustes y resultado de razonamientos falaces o de orientación errónea. En el capítulo 2 se describieron muchas paradojas de rompecabezas, en las cuales al reordenar piezas parece ser que algo se perdió o se ganó. En todos los casos, esas paradojas se pueden resolver al sacar a la luz el truco. Por comparación, las paradojas de Tipo 1 se resuelven en cuanto se entiende su verdad.

En este capítulo se ofrecen varias paradojas de Tipo 1, cada una de ellas semejante de uno u otro modo a la paradoja de Banach-Tarski. En su mayoría son geométricas e implican el rearreglo donde algo se gana

o se pierde. Cada una de ellas puede concebirse como precursora de la más desconcertante de todas las paradojas: el teorema de Banach-Tarski.

Pudiera bastar con definir un conjunto infinito como conjunto que no es finito. Pero esta definición negativa trae consigo el problema de que nos dice lo que no es un conjunto infinito, como algo opuesto a lo que es realmente. Es un modo más bien descriptivo y no aporta ninguna información que valga la pena. En lugar de ella, nos inclinamos por la definición adoptada por Cantor:

Definición de conjunto infinito
Un conjunto es infinito si existe una correspondencia biunívoca entre sus elementos y los elementos de uno de sus propios subconjuntos.

Aclaremos qué entendemos por *correspondencia biunívoca* o de *uno a uno*. A un mapeo de un conjunto en otro se le llama de uno a uno si elementos distintos del primer conjunto se corresponden con elementos distintos del conjunto objetivo. Por ejemplo, el mapeo $x \mapsto x^3$ es biunívoco, mientras que el $x \mapsto x^2$ no lo es. (Considérese $1 \mapsto 1$ y $-1 \mapsto 1$.) A un mapeo biunívoco se le llama *inyección*. Un mapeo (sea o no biunívoco) es una *suprayección* (sobre otro conjunto) si cada elemento del segundo es mapeado por cuando menos un elemento del primero.

Por ejemplo $x \mapsto x^2$ es un mapeo de los números reales sobre los números reales no negativos: una *suprayección*. Un mapeo que es tanto biunívoco como suprayectivo es una *biyección* y es equivalente a una correspondencia de uno a uno entre los elementos de los conjuntos.

La definición de infinito dada por Cantor es ostensivamente paradójica, y prácticamente incita al lector a darle algún sentido. No es contradictoria en sí misma. Sugiere un proceso de anidamiento de regresión infinita, como se ve en la figura 4.1.

Formalmente adoptada por Cantor, esta definición de conjunto infinito fue considerada por varios predecesores de Cantor. Galileo Galilei (1564-1642), el físico matemático italiano, quizá más conocido por haber inventado el telescopio y por su defensa del sistema copernicano o heliocéntrico del universo, puede haber sido el primero en considerar la peculiar naturaleza de las colecciones infinitas en términos de subconjuntos propios. Aunque se hallaba en arresto domiciliario por órdenes de la Inquisición y exactamente cuatro años de su muerte, Galileo escribió *Dos ciencias nuevas* (1638), tratado matemático y filosófico en forma de diálogo entre el inteligente Salviate, el lego Sagredo y el simplón

Simplicius. Aunque abundante en contenido académico, lo que perseguía era criticar a los inquisidores, encarnados por Simplicius. Salviate defiende una correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los enteros y conjunto de cuadrados perfectos de los enteros y llega a la conclusión de que "... debe decirse que los números cuadrados son tan numerosos como todos los números [...] que la multitud de cuadrados no es menor que la de todos los números, o que es la de éstos mayor que la primera" (Galileo Galilei 74, pp. 40-41).

En comparación con el análisis de Galileo de los conjuntos infinitos de enteros, Bernard Bolzano (1781-1848) consideró los conjuntos de puntos densos, tales como los intervalos de la recta de los números reales. Bolzano, sacerdote checoeslovaco de cuya obra matemática sobre el infinito hicieron caso omiso sus contemporáneos, concluyó su *Paradoxien des Unendlichen* [Paradojas del infinito] apenas dieciocho días antes de morir. Considerando la función $y = 2x$, estableció una correspondencia de uno a uno entre los puntos del segmento de recta [0, 1] y el segmento de recta [0, 2]. Semejante al análisis de Galileo de los conjuntos infinitos de enteros, Bolzano demostró que estos dos intervalos eran *iguales* en el sentido de su cardinalidad, a pesar de su desigualdad en cuanto a longitud. Es como si el intervalo [0, 1], subconjunto de [0, 2], pudiera estirarse con sólo reordenar la posición de cada uno de sus puntos para crear un intervalo del doble de su longitud original.

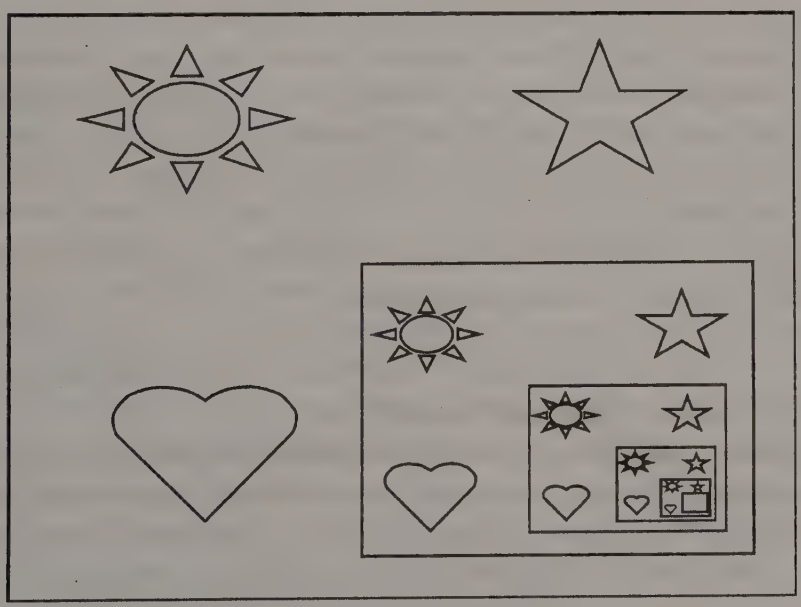


Figura 4.1. Regresión infinita.

En *Paradoxien des Unendlichen*, Bolzano describe esta paradoja de *igualdad-desigualdad:*

> ... muchos de ellos (de los intervalos) son *mayores* (o *menores)* que algunos otros, dicho esto en el sentido de que uno incluye al otro como parte de sí mismo (o representa al otro en la relación de parte a todo). Muchos consideran aún que se trata de una *paradoja* y, en realidad, a los ojos de todo quien define el infinito como aquello que no puede aumentar, la idea de que un infinito sea mayor que otro debe ser no meramente paradójica, sino categóricamente *contradictoria.*

Con respecto a la existencia de una correspondencia biunívoca, Bolzano escribe: "... a pesar de que entra simétricamente en la relación descrita (la correspondencia de uno a uno) con algún otro, los conjuntos pueden seguir manteniendo entre sí una relación de desigualdad, en el sentido de que se encuentra que uno es un todo y el otro parte del todo".

Más tarde abundaremos sobre este punto en la sección de estiramiento de este capítulo.

Richard Dedekind (1831-1916), *el último alumno de Gauss,* conoció a George Cantor en 1874 mientras ambos se hallaban de vacaciones en Interlaken, Suiza. Dedekind criticaba la objeción de Kronecker al infinito, haciéndose partícipe de los puntos de vista de Cantor. Los dos terminaron siendo amigos, y Dedekind seguiría entendiendo los porqués de la teoría de conjuntos de Cantor. Aunque conocido ante todo por su definición de los números irracionales como las *cortaduras de Dedekind,* hizo contribuciones importantes a la teoría de los números y de conjuntos, utilizando la definición de conjunto infinito adoptada por Cantor. Hoy a esa definición se le llama *Definición de Dedekind* de conjunto infinito.

La siguiente definición de conjunto infinito es equivalente a la de Dedekind y parece ser menos paradójica:

Otra definición de conjunto infinito

Un conjunto es infinito si existe una correspondencia de uno a uno (inyección) del conjunto de los números naturales hacia el interior de un conjunto dado.

Recurriendo al axioma de elección es fácil demostrar la equivalencia de las dos definiciones probando que cada una de ellas implica a la otra. Para tal fin, nos referimos a la primera definición como *Definición de Dedekind* y la segunda (optativa) como la *definición inyectiva.*

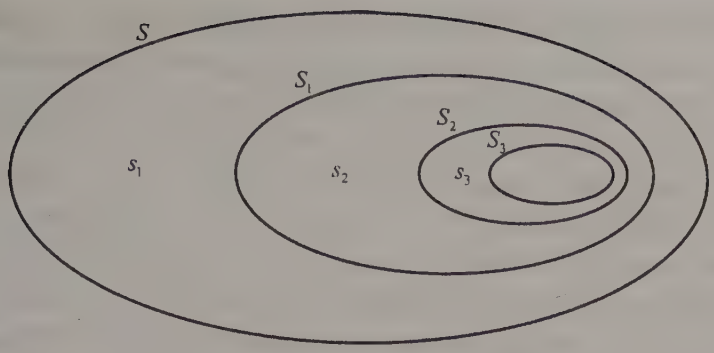


Figura 4.2. La definición de Dedekind implica la definición de inyección.

Para demostrar que la definición de Dedekind implica la definición de inyección, empezamos suponiendo que un conjunto dado S es infinito en el sentido de que hay una biyección entre S y un subconjunto propio S_1 (figura 4.2). Se inferiría que S_1 es también infinito (que tiene la misma cardinalidad que S) y por tanto puede ponerse en correspondencia biunívoca con uno de sus propios subconjuntos, S_2. Procediendo de esta manera, formamos una sucesión contable infinita de conjuntos, cada uno de los cuales es subconjunto de su predecesor: $S \supset S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset ...$

Aplicando el axioma de elección, escogemos

$$s_1 \in S - S_1, s_2 \in S_1 - S_2, ... s_i \in S_{i-1} - S, ...$$

La inyección deseada es la asociación de s_1 con cada número natural i.

Para demostrar que la definición de inyección implica la definición de Dedekind, empezamos suponiendo que S es infinito en el sentido de que existe una correspondencia biunívoca, o inyección, del conjunto de los números naturales en S. De esto se sigue que hay un subconjunto contable de S, llamado A, de la forma $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$. Sea $B = S - A$. Puede ser que B sea vacío, en cuyo caso S es contable. Nosotros queremos demostrar que allí existe una correspondencia de uno a uno entre S y uno de sus propios subconjuntos. En pocas palabras, queremos demostrar que S puede ser propiamente inyectado dentro de sí mismo.

Defínase la inyección como sigue:

$f(a_i) = a_{2i}$ para $a_i \in A$

$f(b) = b$ para $b \in B$

Hemos demostrado, pues, que la definición de Dedekind se mantiene.

Los antecesores de la paradoja Banach-Tarski se presentarán en las siguientes seis secciones de este capítulo:

1. Desplazamiento al infinito
2. Estiramiento
3. Polvo de Cantor
4. Las paradojas de construcción de Vitali
5. El diccionario Hyperwebster de Stewart
6. La paradoja de Sierpinski-Mazurkiewicz

DESPLAZAMIENTO AL INFINITO

El hecho de que un conjunto de puntos infinito pueda ponerse en correspondencia de uno a uno con alguno de sus subconjuntos propios permite ganancias y pérdidas paradójicas y visibles por desplazamiento al infinito y desde éste, como se expuso en el capítulo anterior. El desplazamiento al infinito absorbe puntos y el desplazamiento desde el infinito crea puntos. ¿No estamos violando alguna ley de conservación cuando mostramos que *la parte es tan grande como el todo?* Esta paradoja, permitida por la definición que Dedekind hizo de conjunto, puede ser la paradoja precursora de las que siguen y que mejor resolveremos ahora antes de seguir adelante.

Aprendemos de la experiencia y tenemos experiencia con conjuntos finitos. Tenemos dos ojos, diez dedos y vivimos en un planeta con aproximadamente 6.4×10^9 habitantes humanos. La masa de nuestro planeta es de alrededor de 6×10^{24} kilogramos y estamos a 4×10^{13} kilómetros del sistema estelar más cercano: la estrella Alfa de la constelación del Centauro. Aunque grandes, estos números son finitos y tenemos claro qué significa que un número finito sea mayor (o menor) que otro. Lo que no tenemos es experiencia tangible con colecciones infinitas y debemos ser muy precisos cuando usamos términos tales como "mayor que" y "menor que" con respecto a los conjuntos infinitos.

Figura 4.3. Más cuadrados que puntos –por inspección.

Considérese el ejemplo simple de colecciones infinitas de cuadrados y puntos mostrados en la figura 4.3.

Determinamos rápidamente que hay más cuadrados que puntos notando el corrimiento de la izquierda y el hecho de que ambas filas llegan al mismo punto del lado derecho. De modo natural hacemos parejas (verticalmente) con los cuadrados y los puntos y vemos que hay dos cuadrados más que puntos. No hace falta contar. La experiencia nos dice que nuestra conclusión es válida. Sabemos que no puede haber una correspondencia biunívoca entre los cuadrados y los puntos, pues tal cosa sería violar el *principio de la distribución en casillas*.

Consideremos ahora los cuadrados y puntos de número infinito mostrados en la figura 4.4.

Figura 4.4. ¿Más cuadrados que puntos?

Como antes, tendemos a formar verticalmente parejas de cuadrados y puntos. Intelectualmente sabemos que ambos conjuntos son infinitos. Sin embargo, podemos creer que ambas colecciones se detienen en el mismo lugar *en el infinito*. Cuando lo pensamos, la frase *en el infinito* no tiene sentido. Los cuadrados parecer ser más numerosos que los puntos por los dos cuadrados de más que están a la izquierda. Es evidente que la totalidad no ha cambiado pues aun así podemos hacer parejas de cuadros con puntos biunívocamente, como se ve en la figura 4.5.

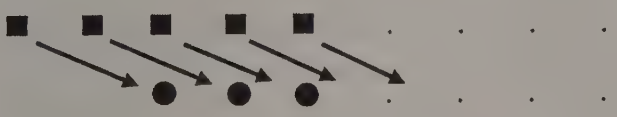


Figura 4.5. El desplazamiento al infinito conserva la cardinalidad

Así, ¿qué es lo que ocurre realmente cuando un conjunto de puntos infinito y numerable {1, 2, 3...} es desplazado (al infinito) dos pasos a la derecha, dando lugar a {3, 4, 5...}? ¿No se pierden puntos? De hecho,

los puntos llamados 1 y 2 sí se pierden pero *la totalidad de puntos no cambia*. Matemáticamente escribimos $\aleph_0 - 2 = \aleph_0$ o, "más" en general $\aleph_0 - n = \aleph_0$ para todo conjunto de números naturales n. Del mismo modo, si el conjunto de puntos {3, 4, 5,...} fuera desplazado (desde el infinito) a la izquierda dos pasos, dando lugar a {1, 2, 3,...} estaríamos ganando dos puntos 1 y 2 sin cambiar la totalidad, o la cardinalidad, del conjunto de puntos original. En general, escribimos $\aleph_0 + n = \aleph_0$. Para alguno esto puede ser una píldora difícil de tragar pues parecer ser que ahora tenemos una nueva forma de aritmética. ¡Y eso es exactamente! Las reglas de la aritmética transfinita son diferentes de las de la aritmética finita (figura 4.6).

$\aleph_0 + n = \aleph_0$ (Véase explicación arriba.)
$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ (Considérese n({1,3,5,...}{2,4,6...} = n({1,2,3,}).)
$n \times \aleph_0 = \aleph_0$ (Procédase inductivamente desde arriba.)

Figura 4.6. Algunas extrañas leyes de la aritmética transfinita.

En el capítulo 3, mostramos que un círculo al que le falta un solo punto es equidescomponible para completar un círculo del mismo radio. Esta técnica de desplazamiento desde y hacia el infinito aplicada ahí es exactamente la misma que estamos describiendo ahora. En lugar de pensar en el conjunto de puntos {1, 2, 3,...} como un conjunto de puntos infinito sobre una línea recta, podríamos considerar los puntos espaciados una unidad aparte de la circunferencia de un círculo de radio uno. Más allá de esto, el concepto es el mismo.

Las paradojas de *desplazamiento hacia el infinito* existen también en el espacio tridimensional. Podemos desplazar la mitad del plano cartesiano dos unidades a la derecha y obtener un conjunto de puntos bidimensional que es un subconjunto propio del medio plano original (figura 4.7). Perdemos algunos puntos. En realidad tenemos una pérdida de una infinitud incontable de tales puntos. Sin embargo, la totalidad (o cardinalidad) de los puntos del conjunto desplazado debe ser igual al número de puntos del hemiplano original. Debe quedar clara una correspondencia de uno a uno de los puntos.

La paradoja se reduce cuando aceptamos el hecho de que la totalidad no cambia, a pesar de que se le agreguen o quiten puntos. Tal es la naturaleza de los conjuntos de puntos infinitos.

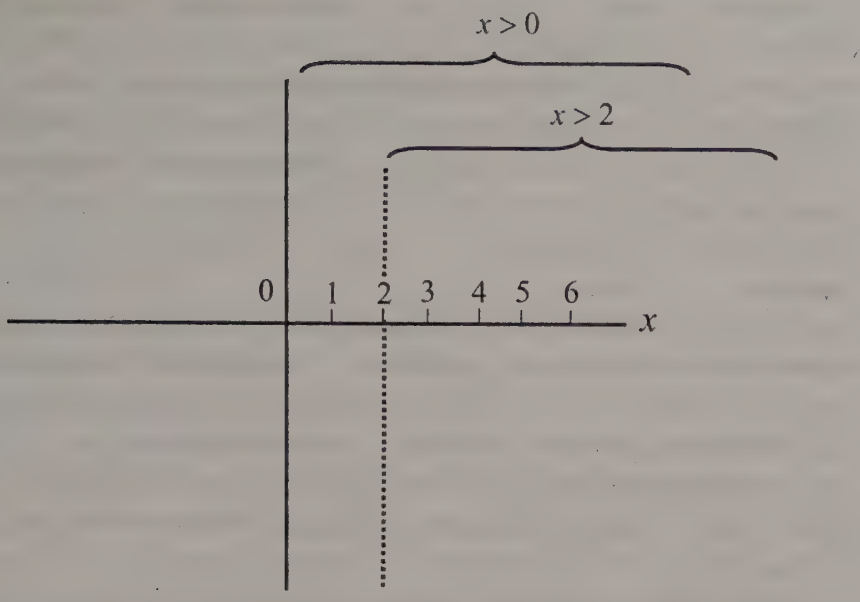


Figura 4.7. Desplazamiento del hemiplano al infinito.

Damos un ejemplo más de desplazamiento al infinito pues será componente primordial de nuestra demostración del teorema de Banach Tarski. Es sencillo demostrar que la superficie de una esfera a la que se le ha quitado un punto es equidescomponible en la esfera completa. Considérese simplemente el punto faltante como perteneciente al círculo sobre la superficie de la esfera y desplácese desde el infinito, como en el capítulo 3, para tapar el hoyo (figura 4.8).

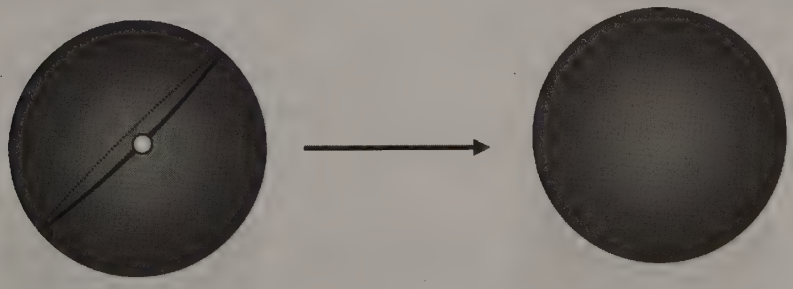


Figura 4.8. Tapando el hoyo por desplazamiento desde el infinito.

Lo haremos, como en el capítulo 3, seleccionando un punto sobre la circunferencia del círculo. Esto puede hacerse de modos innumerables pues hay incontables números irracionales. (En el capítulo 3, avanzamos alrededor del círculo una distancia de una unidad, que es un múltiplo irracional de la circunferencia de 2π del círculo.) Luego desplazamos para atrás, es decir, retrocedemos desde el infinito, como en el capítulo 3, para tapar el hoyo sobre la superficie de la esfera.

Empleando exactamente la misma técnica, podemos mostrar que la superficie de una esfera a la que falta un número contable de puntos (es decir, que tiene hoyos) es equidescomponible en la esfera completa.

Comencemos escogiendo un eje de rotación que no pase por ninguno de los hoyos. Con puntos no numerables en la superficie de la esfera y sólo hoyos contables, hay infinidad de maneras de escoger el eje (figura 4.9).

Cada punto (hoyo) faltante describe un círculo a medida que gira la esfera. Hay así a lo más un número contable de círculos descritos por el número contable de puntos faltantes. Deseamos seleccionar un ángulo tal que ningún múltiplo del ángulo enviará uno de los puntos faltantes a sí mismo o a cualquier otro de los puntos faltantes. Como el número de puntos faltantes es contable, hay ángulos incontables de entre los cuales elegir. Llamémosle θ al ángulo especial.

Por rotación repetida del conjunto de puntos faltante por θ, formamos una sucesión de conjuntos disjuntos de puntos, ninguno de los cuales coincide con otro. Si retrotraemos esta secuencia de conjuntos de puntos desde el infinito el ángulo θ, todos los hoyos quedarán, por decirlo así, taponados.

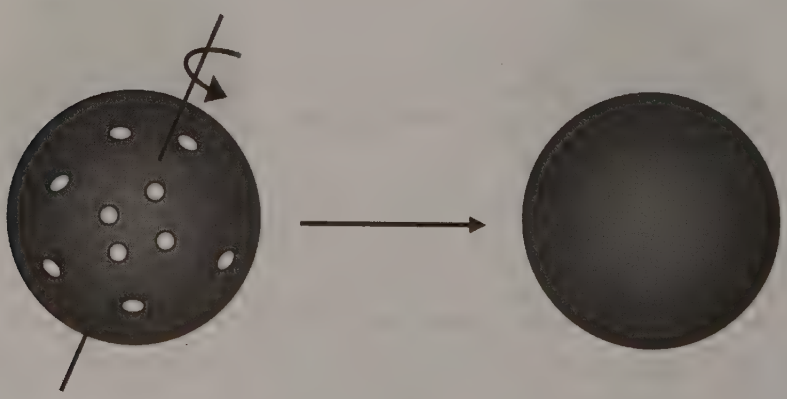


Figura 4.9. Tapando hoyos numerables por desplazamiento desde el infinito.

Poder tapar estos hoyos es crítico en nuestra demostración del teorema de Banach-Tarski. Este procedimiento llegará al final de la demostración y nos permitirá crear dos esferas (sus superficies o 2-esferas como dicen los matemáticos) de una. Seguidamente será asunto sencillo extender la paradoja de las superficies esféricas a pelotas macizas.

ESTIRAMIENTO

Alguien preguntó si había más puntos en un segmento de recta de longitud dos, que en un segmento de longitud uno. Las respuestas varían. La respuesta correcta es que el número de puntos de cada segmento es igual a la potencia del continuo, *c*. Por consiguiente, cada segmento tiene el mismo número transfinito de puntos. Nos las arreglamos para reordenar independientemente los puntos del segmento de recta de longitud uno y estirar el segmento hasta el doble de su longitud original. Bolzano observó que la igualdad de la cardinalidad (contenido) existe a pesar de la desigualad de la longitud.

Como ya se dijo, podemos atribuir la paradoja a lo que tenemos por experiencia directa. Es natural percibir un punto como un punto gramatical en esta página o un grano de arena, cada uno, desde luego, muy pequeños pero de medida finita. El punto, signo de puntuación, sobre esta página puede ser un disco de pequeño diámetro, 0.1 mm y un grano de arena sería un sólido tridimensional de volumen finito. Entendemos que combinar números finitos de estos signos de puntuación o granos de arena producen formas de tamaños finitos. Combinar cantidades infinitas produce formas de tamaños infinitos. Pero, en la realidad matemática, los puntos tienen medida cero y se consideran meras posiciones. Siendo infinitamente pequeños, no se sujetan a las reglas de la aritmética finita. Es difícil abandonar nuestros hábitos al trabajar con cantidades infinitesimalmente pequeñas, igual que empezar a aceptar las leyes de la aritmética transfinita que se aplican a cardinalidades infinitamente grandes.

En las páginas que siguen, consideraremos las paradojas de estiramiento de una, dos y tres dimensiones. ¿Se puede estirar un punto hasta un conjunto de puntos de dimensión mayor? La respuesta quizá lo sorprenda a usted, lo mismo que desconcertó a Cantor. Los preliminares de la paradoja BT de esta sección abarcan estiramientos (o compresiones) en donde paradójicamente se ganan (o pierden) puntos.

En la figura 4.10 se dan muestras de estiramientos monodimensionales. Cada una de ellas es una *demostración gráfica* del hecho de que los

conjuntos de puntos monodimensionales pueden constar exactamente del mismo número de puntos, a pesar de su desigualdad con respecto a su longitud. Esta es la paradoja de la igualdad-desigualdad señalada por Bolzano.

La figura del ángulo superior izquierdo muestra la correspondencia biunívoca de los conjuntos de puntos asociados con los segmentos de recta AB, CD y EF. Cada conjunto contiene el mismo número de puntos, a pesar de sus diferentes longitudes. Así que, en cierto sentido, los puntos del segmento de recta se pueden reordenar para que formen los segmentos de recta CD y EF. De uno u otro modo estamos estirando AB para que se conforme respecto de CD y EF sin aumentar la cardinalidad del conjunto de puntos AB.

Los tres círculos concéntricos mostrados en el ángulo superior derecho ilustran el mismo fenómeno. Los círculos de cualquier radio tienen el mismo número de puntos en sus circunferencias.

La ilustración de la parte inferior de la figura ya se presentó en el capítulo 1. El arco semicircular, de longitud uno, es de longitud finita y la recta de los números reales es de longitud infinita. Sin embargo, se ve claramente que hay el mismo número de puntos en el arco y en la recta. Todos los conjuntos de puntos ilustrados contienen el mismo número de puntos. El número es *c*, la potencia del continuo.

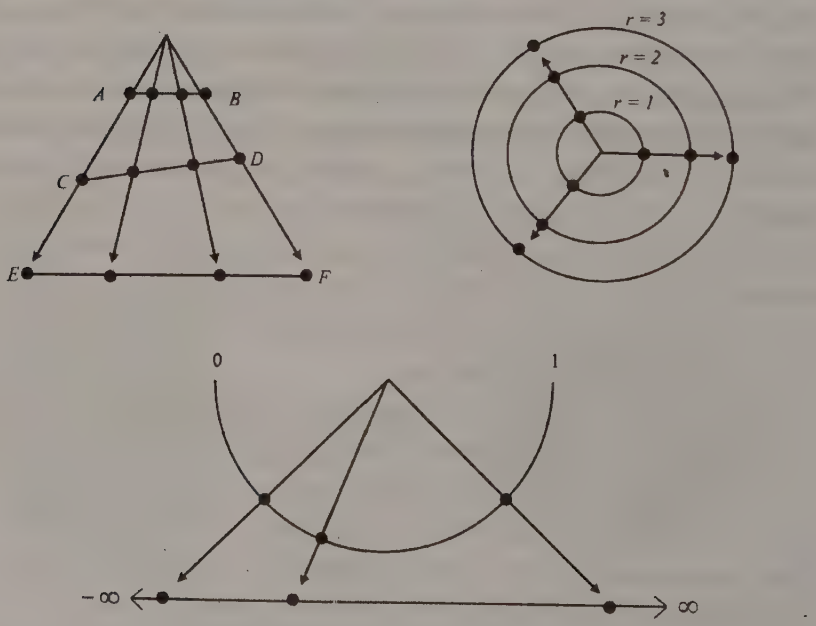


Figura 4.10. Conjuntos de puntos unidimensionales que tienen la misma cardinalidad que el continuo.

Una forma más precisa de garantizar que dos conjuntos tienen la misma cardinalidad consiste en mostrar la biyección (correspondencia biunívoca y suprayección) que mapea cada punto de un conjunto con un punto único del otro. Esto se hace fácilmente en los ejemplos ilustrados. Si x es un miembro del conjunto de todos los puntos entre $x = 0$ y $x = 1$ (escribimos $x \in [0, 1]$, entonces $2x \in [0, 2]$. Se pueden mostrar de esta manera todos los segmentos de recta de longitud finita en correspondencia de uno a uno. Del mismo modo, si (x, y) es un punto de un círculo de radio uno centrado en $(0, 0)$, entonces $(2x, 2y)$ es un punto de un círculo de radio con centro en $(0, 0)$. El argumento se extiende a los círculos de cualquier radio.

Existe toda una variedad de biyecciones que establecen la correspondencia biunívoca entre $(0, 1)$ y $(-\infty, \infty)$. Entre las biyecciones de $(0, 1)$ a $(-\infty, \infty)$ están

$$x \mapsto \frac{2x^2 - 1}{2x^2 - 2x} \quad \left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\ldots\right\} \subseteq [0,1] - \left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\ldots\right\}.$$

Entre las biyecciones de $(\infty-, \infty)$ a $(0, 1)$ figuran

$$x \mapsto \frac{|x| + x + 1}{2|x| + 2} \qquad x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x.$$

La paradoja del estiramiento sólo se puede resolver cuando aceptamos el hecho de que un punto tiene medida cero, contrariamente a nuestra experiencia del mundo real con puntos tales como los puntos de un texto y los granos de arena. Puede ayudar pensar el punto como una posición y no como objeto, para preguntarnos una vez más: "¿hay más posiciones en un segmento de recta de longitud uno que en otro de longitud dos?"

Considérense dos conjuntos de puntos lineales {x:0<x<1} y {x:0x1}. ¿Se puede estirar (amplificar) el primero de modo que coincida con el segundo? Denotamos el primero con el intervalo abierto [0, 1] –puntos finales incluidos (figura 4.11). Son iguales en longitud y difieren sólo en los dos puntos finales o extremos. Esperaríamos que la cardinalidad de ambos conjuntos fuera la misma que la del continuo –c.

Figura 4.11. ¿Un estiramiento mínimo?

El estiramiento sería mínimo en comparación con los otros. ¿Pero cómo podemos mostrarlo? Es más difícil de lo que parece exhibir una biyección de un conjunto en el otro. En consecuencia, ¿cómo podemos estar seguros de que las cardinalidades son las mismas y los elementos de cada conjunto pueden ponerse en correspondencia biunívoca?

Podemos recurrir al teorema de Schröeder-Bernstein, mencionado en el capítulo 3. Se emplea una versión de este teorema para demostrar el teorema de Banach-Tarski y demostramos esta versión en el capítulo 5. El teorema establece que si existe una función inyectiva (de uno a uno) desde cada uno de los dos conjuntos en el otro, entonces existe una biyección de un conjunto en el otro y los conjuntos tienen la misma cardinalidad. Como se ve en la figura 4.12, es fácil establecer una inyección de (0, 1) en [0, 1] y en dirección inversa por simple estiramiento (o más bien por compresión), como se expuso antes.

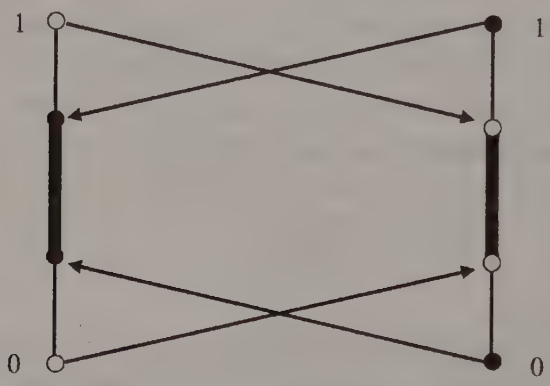


Figura 4.12. Aplicación del teorema de Schröder-Bernstein.

Vemos que las dos inyecciones y los dos conjuntos de puntos son necesariamente de la misma cardinalidad. Debemos ser capaces de encontrar una biyección de uno en el otro. El truco implica conservar fijos ciertos puntos y desplazar otros. Presentamos una biyección de [0, 1] a (0, 1). Considérese

$$\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}...\right\}\subseteq[0,1] \textit{ y sea } A=[0,1]-\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}...\right\}.$$

Defínase la biyección de [0, 1] a (0, 1) como se muestra en la figura 4.13

Existen otras biyecciones semejantes a la del ejemplo de la figura 4.13 que conservan fijos algunos puntos y cambiantes otros. Lo extraño es que ninguna es continua. No hay biyección que se estire o amplifique (0, 1), por levemente que sea, para transformarla en [0, 1] de modo

continuo. Hace falta reorganizar radicalmente los puntos para cumplir la tarea. Es extraño que (0, 1) pueda estirarse de modo continuo por biyección, sin problemas, al doble de su tamaño o incluso al de la recta de los reales. Sin embargo, encontrar una biyección que se extienda sólo dos puntos puede requerir de un inteligente mapeo discontinuo. Esto no se puede hacer de modo continuo por amplificación: por consiguiente el estiramiento, al estilo de una banda de hule, es imposible. La razón de la dificultad procede de un teorema (cuya demostración se omite) que establece que los conjuntos compactos (cerrados y con frontera) son mapeados por funciones continuas en conjuntos compactos. Sería imposible, pues, tomar el conjunto de puntos compacto [0, 1] y mapearlo de modo continuo (comprimiéndolo) en el conjunto abierto (0, 1). Hacerlo a la inversa (estirándolo) es del mismo modo imposible.

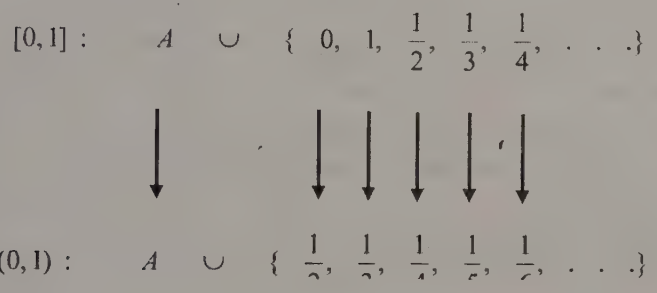


Figura 4.13. Biyección de [0, 1] sobre (0, 1).

De manera semejante existen biyecciones de [0, 1] a [0, 1) y de [0, 1] a (0, 1]. Las biyecciones implican reorganización importante de puntos y no son continuas, a pesar de lo mínimo de su extensión.

En resumen, todos los conjuntos de puntos del intervalo, sean cerrados, abiertos, de longitudes finita o infinita, poseen el mismo número de puntos y este número se denota con *c*, la potencia del continuo.

Dos paradojas de estiramiento bidimensionales son similares a los estiramientos monodimensionales. Varios de éstos se ilustran en la figura 4.14 con una demostración gráfica de que los puntos de estos conjuntos se pueden poner en correspondencia biunívoca.

La figura del ángulo superior izquierdo de la figura 4.14 sugiere que todos los conjuntos de puntos en forma de cuadrado (incluso el interior) son de la misma cardinalidad. Con la ilustración del ángulo superior derecho, de superficies esféricas concéntricas, se intenta demostrar que

todas las superficies consisten en el mismo número de puntos, no obstante que sean de medidas diferentes. La ilustración de abajo muestra que los puntos de una superficie hemisférica se pueden poner en correspondencia de uno a uno con el plano bidimensional infinito.

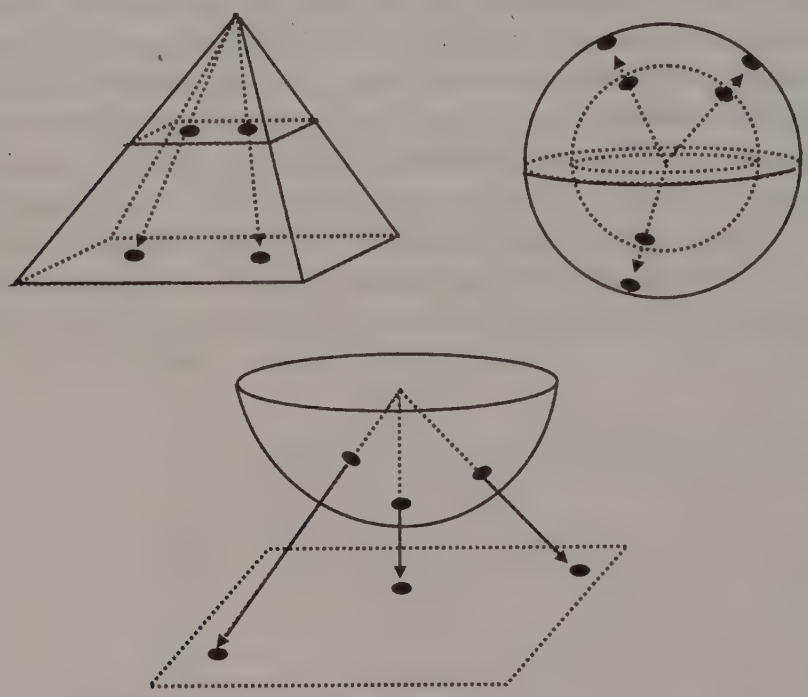


Figura 4.14. Dos estiramientos bidimensionales.

¿Cómo se compara la cardinalidad de estos conjuntos de puntos monodimensionales con c, la cardinalidad de los conjuntos de puntos unidimensionales, ya tratada? Sería de esperarse que un espacio bidimensional contuviera más puntos que un espacio monodimensional, pues, en cierto sentido, es más extenso. ¿Es concebible que los puntos de un conjunto de puntos monodimensional, como un segmento de recta, se puedan poner en correspondencia de uno a uno con un conjunto de puntos bidimensional? Una línea no tiene *ancho* y parece anómalo que un área dada y una recta dada contengan el mismo número de puntos.

Cantor se hizo esa misma pregunta. ¿Hay más puntos en el plano que en una recta? En general, ¿cómo afecta la dimensión de un conjunto de puntos la cardinalidad de ese conjunto de puntos? El caso más sencillo de investigar sería el de un segmento de longitud uno y un cuadrado (incluido su interior) de lado uno (figura 4.15).

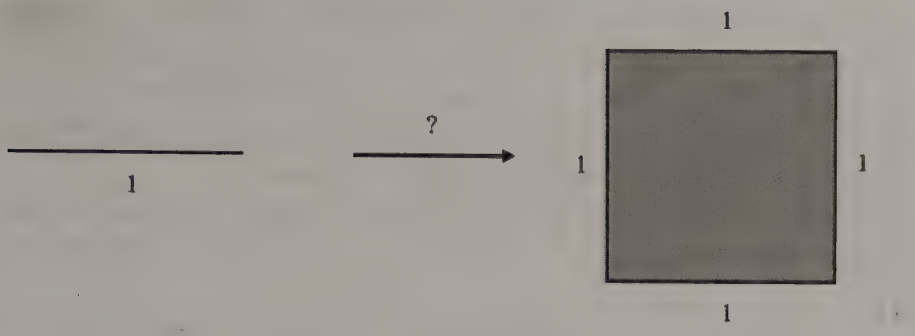


Figura 4.15. Segmento de recta a cuadrado.

En 1874, Cantor escribió a Dedekind preguntándole si sería posible mapear cada punto de una recta dada con cada punto de cierta superficie. Cantor sospechaba que la respuesta era "no" pues se necesitan dos coordenadas para especificar un punto en un plano bidimensional mientras que con una sola coordenada basta para especificar un punto de una línea recta. Otros le sugirieron a Cantor que no valía la pena insistir en buscar una respuesta, pues sería imposible encontrar una correspondencia entre los puntos de conjuntos de dimensiones diferentes.

Cantor quedó atónito al descubrir que sí había en realidad tal correspondencia. En 1897, le volvió a escribir a Dedekind, en francés (Aczel 00, p. 119), "Je le vois, mais je ne crois pas!" [¡Lo veo pero no lo creo!] De nuevo Cantor se sintió urgido a aceptar resultados difíciles de comprender. Dedekind le contestó a Cantor, advirtiéndole que sus resultados no serían bien recibidos. Editores como August Leopold Crelle, de la revista de Crelle dudaban en aceptar los artículos remitidos por Cantor pues les preocupaba que posiblemente contuvieran errores.

Hay numerosas maneras de mostrar la correspondencia biunívoca, entre ellas la técnica de Schröder-Bernstein. Haremos aquí una biyección simple entre el conjunto de puntos $(0, 1] = \{x:0< x \leq 1\}$ y el conjunto de puntos bidimensional $\{(x, y): 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1\}$.

Tal como se dijo en el capítulo 1, cada número real entre 0 y 1 se puede representar por una fracción decimal sin término final; es decir, una fracción que no termina en un número infinito de ceros. Cualquier fracción decimal que sí termine, como 0.56, se puede reemplazar con una representación que concluya en un número infinito de nueves; esto es: 0.56 = 0.5599999... Del mismo modo, el número 1 puede escribirse como 0.99999... Conviniendo en escribir todas las fracciones decimales en una forma que no tenga fin, construimos la biyección como sigue.

Sea $r \in (0, 1]$. No teniendo final, es de la forma $r = r_1r_2r_3...$ y contiene un número infinito de dígitos que no son ceros. Divídase la representación decimal de r en secciones donde cada sección consista ya sea en un dígito (si éste no es cero) o en varios dígitos que empiecen con cero y terminen con el siguiente dígito que no sea cero.

Por ejemplo, digamos r = 0.5307003455000038... . Luego se divide r como se ve en la figura 4.16.

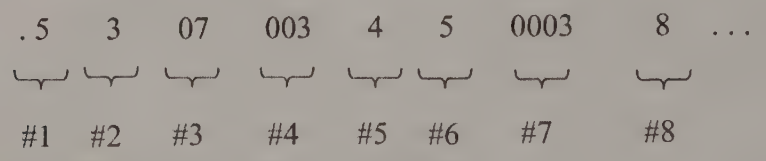


Figura 4.16. División de *r* para formar (x, y).

Ahora sepárense las secciones impares y concaténenselas para formar una fracción decimal *x*. Aquí, x = 0.50740003... . Del mismo modo sepárense las secciones pares y fórmese la fracción decimal *y*. En este caso y = 0.300358... . Nuestra biyección será tal que el número real r = 53070034500038... será mapeado al punto (x, y) = (.50740003..., 300358...) y definiremos nuestra biyección $r \mapsto (x, y, z)$. En otras palabras, la dimensión no tiene nada que ver con la cardinalidad de un conjunto de puntos continuo. Todos los conjuntos como éstos tienen la cardinalidad del continuo, y es posible colocarlos entre sí en correspondencia de uno a uno.

La biyección descrita no es continua y por tanto tampoco un *estiramiento* como el de una liga. ¿Puede un segmento de recta ser estirado (de modo continuo) de manera tal que llene un área? Más en general: ¿existe algo así como una *curva que llene un espacio?* En 1890, el matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) fue el primero en demostrar que tal cosa era en realidad posible. David Hilbert y E. H. Moore (1862-1943) siguieron con sus propios ejemplos de tales curvas que llenan el espacio. En la figura 4.17 se ve cómo una curva monodimensional puede llenar un cuadrado bidimensional.

La curva de Hilbert se produce empezando con la forma básica (una especie de grapa) bosquejada en la parte izquierda de la figura 4.18. El segundo paso es reemplazar la grapa del primer paso con cuatro mitades de la forma básica unidas por tres segmentos de recta (figura 4.18).

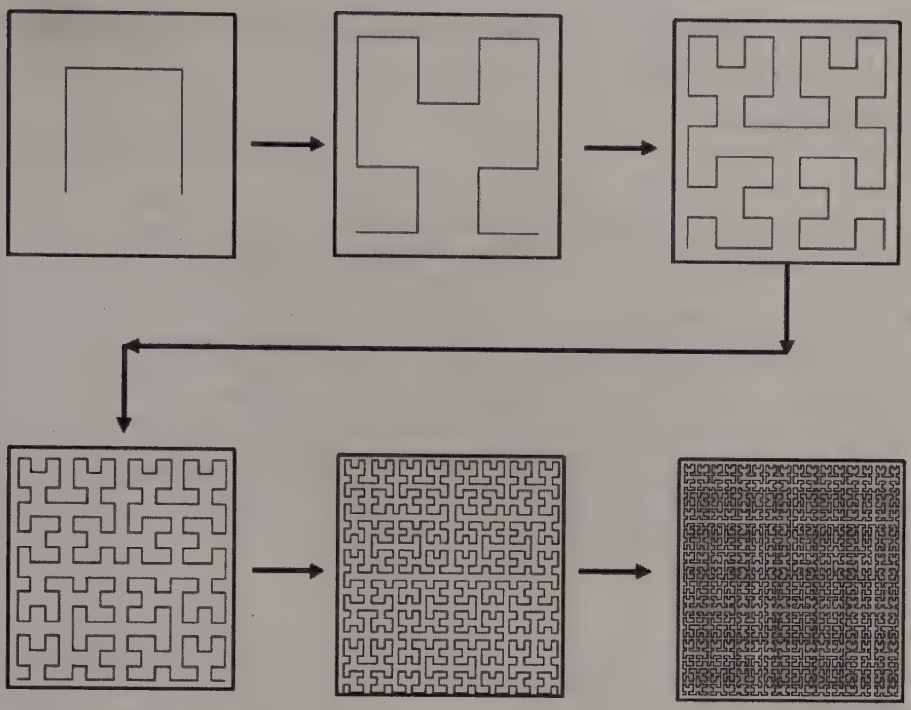


Figura 4.17. Curva de Hilbert.

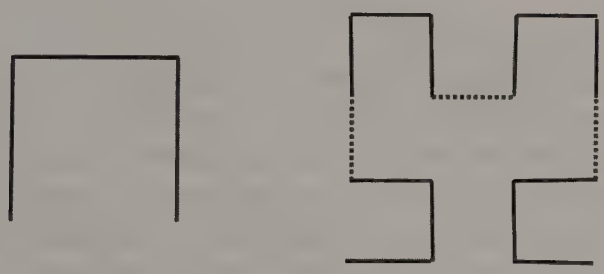


Figura 4.18. Creación de la curva de Hilbert.

La tercera iteración se ejecuta del mismo modo, reemplazando cada una de las cuatro pequeñas grapas del segundo paso por otras cuatro más pequeñas con sus respectivas conexiones de segmentos de recta. El proceso continúa para siempre y es claro que ninguna curva obtenida de tal modo llenará enteramente el cuadrado. Es la curva que delimita la que llena el cuadrado, y se puede demostrar que esta curva es continua. Tales curvas que llenan el espacio no son biyecciones pues deben intersecarse y por consiguiente no hay correspondencia de uno a uno. Sin embargo es ¡un notable estiramiento!

¿Se puede llenar el espacio tridimensional mediante una curva? ¡Por qué no! (Véase la figura 4.19.)

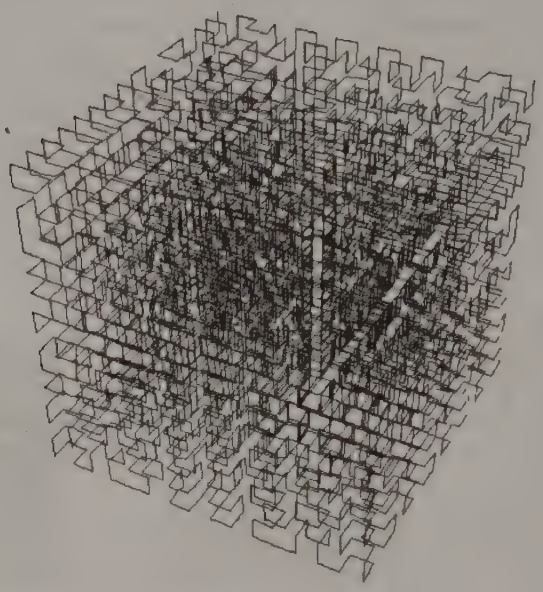


Figura 4.19. Curva de Hilbert tridimensional.

EL POLVO DE CANTOR

Se corta a la mitad un trozo de cuerda de 30 cm de largo y se descarta una de las dos mitades resultantes. ¿Qué queda? Nos queda un trozo de cuerda de 15 cm de largo. Más exactamente, si quitamos un segmento de recta de longitud b de un segmento de recta más grande y longitud a, lo que queda es un segmento de recta a-b. Ror otro lado, la cardinalidad del segmento restante (considerado como conjunto de puntos) es la misma que la del segmento original.

$$c - \frac{1}{2} = c$$

La cardinalidad, sea finita o infinita, mide el contenido del conjunto, no su tamaño. Por ejemplo, los intervalos [0, 1], [0, 2] y tienen la misma cardinalidad (c) y por tanto se considera que contienen el mismo número de puntos. Sin embargo, el primero es de una unidad de longitud; el segundo, de dos unidades; y el tercero, de longitud infinita. La cardinalidad no refleja estas longitudes, y necesitamos algún artilugio para medir la extensión de un conjunto de puntos.

La *medida de Lebesgue*, o simplemente *medida* de un conjunto de puntos, mide la extensión o tamaño del conjunto. Para el conjunto de puntos n-dimensional A, la medida de Lebesgue m(A) satisface las siguientes condiciones:

1. El cubo unidad n-dimensional tiene medida uno.
2. Los conjuntos congruentes tienen la misma medida. Esto es, m es invariante sometida a una isometría.
3. La medida de Lebesgue es aditiva de modo finito y contable. Lo cual significa que para una colección finita (o contable) de conjuntos de puntos disjuntos la medida de su unión no es igual a la suma de sus medidas respectivas. Formalmente, $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ y

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_1).$$

La medida de Lebesgue satisface las nociones comunes de longitud, área y volumen. La medida del segmento de recta [a, b] es b-a. Las medidas de conjuntos de puntos bi y tridimensionales (rectángulos, esferas, etc.) se obtienen por medio de las acostumbradas fórmulas de áreas y volúmenes. Un punto tiene medida cero.

El conjunto de los números racionales entre cero y uno tiene medida cero porque es una colección contable de puntos aislados, cada uno de ellos de medida cero. De ahí que el conjunto de los números irracionales entre cero y uno deba ser de medida uno.

Volvamos a nuestro trozo de cuerda y hagámonos las siguientes preguntas. Si removemos varios trozos de longitud total uno del trozo original de 30 cm, ¿qué es lo que queda? Sea lo que sea que quede, incluso nada, tendremos una medida total, o longitud, de cero. ¿Pero qué pasa con la cardinalidad del conjunto de puntos restante? ¿Sería cero? ¿Podría ser otra cosa que cero? Si los trozos se remueven de un modo especial, el conjunto restante, conocido como *conjunto de Cantor* o *polvo de Cantor*, resulta ser algo verdaderamente notable.

Empezando con un segmento de recta de longitud uno y eliminando el tercio medio. Esto es: de [0, 1] removemos todos los puntos que se hallan estrictamente entre ⅓ y ⅔.

Lo que queda es

$$[0, 1] - \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Removamos ahora los tercios medios de cada uno de los dos segmentos restantes. Continúese el proceso de un número de pasos infinito, removiendo siempre el tercio medio de los segmentos que van quedando. En la figura 4.20 se ven los primeros pasos del proceso.

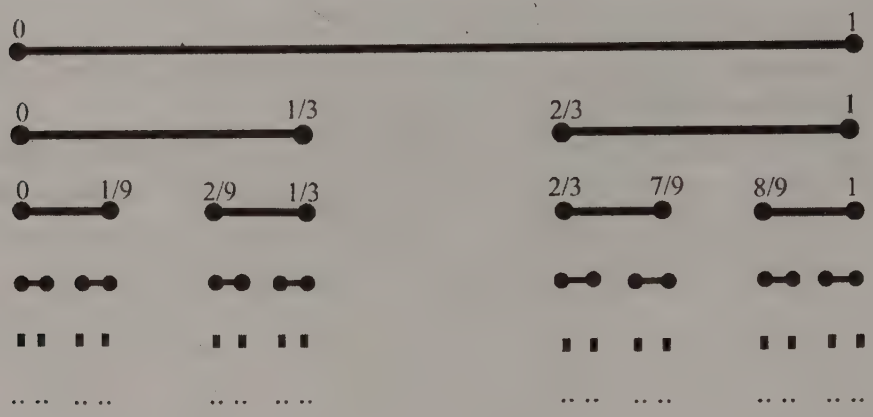


Figura 4.20. Formación del conjunto de Cantor.

Es difícil ilustrar el conjunto de Cantor más allá de este punto. Sin embargo, parece ser que hubiera poco menos que nada de nuestro segmento original después de un número infinito de tales pasos. Avala este resultado el hecho de que la longitud total de todos los intervalos removidos es uno, la longitud del segmento original. Demostramos lo anterior valorando la serie geométrica infinita

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\frac{8}{81}+\ldots\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{i}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right)=1.$$

Se infiere que la medida o longitud total del conjunto de puntos restante es cero. En realidad, si escogemos al azar un punto del segmento de unidad original, la probabilidad de que pertenezca al conjunto de Cantor es de cero. ¿Es cierto entonces que no queda nada? ¿En dónde está la paradoja? De hecho, hay algo que queda y mucho más de lo que podríamos prever. Como mínimo quedan los puntos extremos de los segmentos de la figura 4.20. El conjunto de Cantor incluye, pues,

$$0,1,\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{7}{9},\frac{8}{9},\frac{1}{27}\ldots$$

En esta etapa podríamos sospechar que el conjunto de Cantor consistirá en un número contable de puntos cuya medida total será cero. Pero la verdad es que en cuanto removemos todos los intervalos, lo que queda es un conjunto de puntos incontable, ¡no menor que el número de puntos con el que comenzamos! Lo cual significa que el conjunto conocido como polvo de Cantor, de medida cero, se puede poner en correspondencia biunívoca con los puntos del segmento de recta unidad y completo. Parece que pudiéramos reordenar los puntos del conjunto de Cantor para reconstruir el intervalo original.

Para ver por qué esto es así, consideremos la representación en base tres (ternaria) de los puntos removidos del intervalo [0, 1] y los puntos que quedan (el conjunto de Cantor). Los primeros tres renglones del proceso de remoción se observan en la figura 4.21 con los puntos extremos dados en notación de base tres.

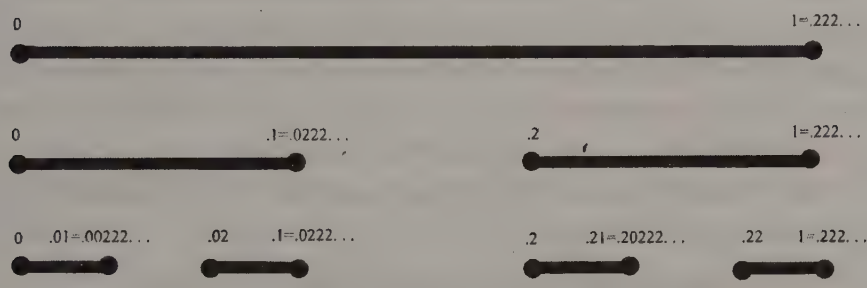


Figura 4.21. Formación del conjunto de Cantor: representación ternaria.

Cuando removemos el tercio medio del segmento [0, 1] como primer paso de la construcción del conjunto de Cantor, removemos estrictamente todos los puntos entre 1/3 y 2/3. Estos números, escritos en sistema ternario, requieren todos ellos un 1 en el primer lugar decimal. No removemos 1/3, escrito como 0.1 en base tres, pues el 1 no es necesario. Bien podríamos escribir 0.0222... .

Al remover, pues, el tercio medio del segmento original estamos removiendo todos los puntos cuya representación ternaria requiere de un 1 inmediatamente después del punto decimal.

En el segundo paso de la construcción del conjunto de Cantor se remueven (1/3, 2/9) de [0, 1/3] y (7/9, 8/9) de [2/3, 1]. Así se quitan todos los puntos cuya representación ternaria demanda un 1 en el segundo lugar decimal. Y en la tercera etapa se eliminan todos los puntos que exigen 1 uno en el tercer lugar decimal, y así sucesivamente.

Llegamos a la conclusión de que el conjunto de Cantor (lo que resta después de removidos todos esos intervalos) consiste en los puntos que pueden representarse con ceros y doses después del punto decimal.

¿Pero cómo sabemos que el conjunto de Cantor contiene un número infinito de tales puntos? Existe un mapeo obvio de todos los números escritos con ceros y doses después del punto decimal. Simplemente cámbiese cada 2 a 1. ¿Y cuántos números se pueden escribir usando ceros y unos después del punto decimal? Hay un número incontable de tales números, ya que las representaciones binarias de cualquier número entre cero y uno implican sólo ceros y unos. Nuestra conclusión es que el conjunto de Cantor (de medida cero) tiene cardinalidad c y puede mapearse de modo continuo, o estirarse, sobre el intervalo cerrado [0, 1] (de medida 1). ¡Con poco se llega lejos si lo hacemos bien!

El conjunto de Cantor debe contener, por tanto, más puntos que únicamente los puntos extremos de los segmentos de recta restantes. Por ejemplo, el número 1/4 (0.25 en base diez) tiene como representación ternaria 0.020202... y por eso pertenece al conjunto de Cantor. Del mismo modo, la representación ternaria de 3/4 es 0.202020... y la de 1/13 es 0.002002002... Cada una de estas fracciones pertenece al conjunto. En realidad los puntos extremos constituyen una parte infinitesimal del conjunto de Cantor.

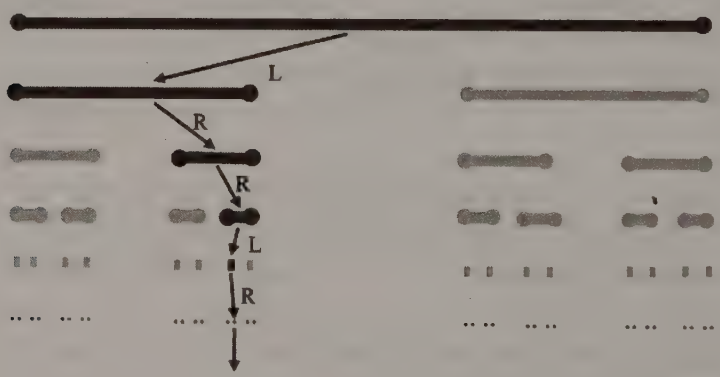


Figura 4.22. Ramificación binaria para especificar un punto del conjunto de Cantor.

Una manera gráfica de confirmar la cardinalidad del conjunto de Cantor consiste en caracterizar cada punto del conjunto por el camino que debe seguirse para llegar al punto, comenzando en la parte superior de la figura 4.22. Se requiere de una sucesión infinita de decisiones izquierda-derecha, o ramas, para llegar al punto deseado del conjunto

de Cantor. La sucesión ilustrada, LRRLR..., define un punto específico del conjunto de Cantor. Si reemplazamos L con 0 y R con 1, tendremos sucesiones infinitas de ceros y unos que especifiquen puntos del conjunto de Cantor. Tales sucesiones, precedidas de un punto decimal, representan números reales entre 0 y 1, conjunto de cardinalidad *c*. Esto confirma el hecho de que hay en el conjunto de Cantor tantos puntos como en el segmento de recta original [0, 1].

Llevando todo esto a sus últimas consecuencias, considérese lo siguiente. Las partículas del polvo de Cantor (de cardinalidad *c)* residen en un espacio monodimensional y son de medida cero. Se pueden reposicionar (estirar) para cubrir el intervalo unidad [0, 1]. Los puntos de este intervalo se pueden reposicionar de modo continuo para crear una curva que llene el espacio, abarrotando el cubo unidad. Los puntos del cubo se pueden reposicionar de modo continuo para que coincidan con los puntos de un cubo de cualquier volumen finito.

Podemos sacar en conclusión que las partículas del polvo de Cantor, de medida cero, se pueden reposicionar de modo continuo para llenar el volumen de cualquier cubo, ¡no importa lo grande que sea!

Puede hacerse una construcción semejante en el cuadrado unidad para formar un análogo bidimensional del conjunto de Cantor. Comencemos por eliminar del centro un noveno del cuadrado unidad. Luego removemos los centros de los ocho cuadrados, y así sucesivamente. El conjunto de puntos restante, conocido como la *Alfombra de Sierpinski* (figura 4.23), es de medida cero ya que el área total removida es

$$\frac{1}{9}+\frac{8}{81}+\frac{64}{729}+\ldots=\frac{1}{9}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^{i}=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{1-\frac{8}{9}}\right)=1$$

Sin embargo, como antes, la cardinalidad de su conjunto de puntos es *c* y los puntos de la alfombra se pueden poner en correspondencia biunívoca con todos y cada uno de los puntos del cuadrado unidad original.

En tres dimensiones, la construcción produce la *Esponja de Sierpinski-Menger* (figura 4.24).

Los conjuntos de Cantor (en una, dos y tres dimensiones) muestran todos ellos la calidad fractal de ser semejantes a sí mismos. Cualquier pieza del conjunto, independientemente de lo pequeña que sea, puede amplificarse para que se parezca al original. Estos conjuntos pueden ser los más antiguos fractales inventados matemáticamente.

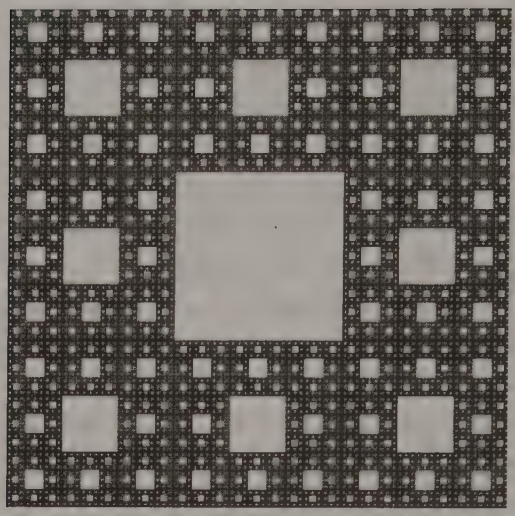


Figura 4.23. La alfombra de Sierpinski.

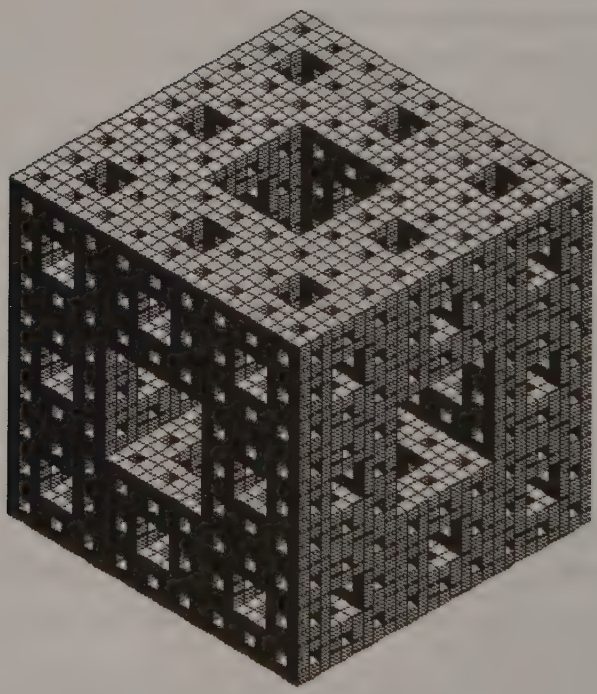


Figura 4.24. La esponja de Sierpinski-Menger.

LAS PARADOJAS DE CONSTRUCCIÓN DE VITALI

¿Deben ser mensurables todos los conjuntos de puntos acotados? En 1905, el matemático italiano Giuseppe Vitali (1875-1932) demostró que existen conjuntos de puntos delimitados a los cuales no se puede asignar una medida de Lebesgue. La construcción de Vitali de un conjunto no mensurable es relativamente simple y la exponemos a continuación. Se funda en el axioma de elección y conduce a notables antecesoras de la paradoja de BT.

Sean a y b pertenecientes a [0, 1]. Decimos que a y b son equivalentes (escribiendo a ~ si a-b es un número racional. En consecuencia, todos los números racionales de [0, 1] son equivalentes. Entre otros ejemplos están

$$\frac{1}{\pi} \sim \frac{2+\pi}{2\pi}$$

porque estos dos números difieren en el número racional 1/2. Los números 1/2 y $1/\sqrt{2}$ no son equivalentes porque su diferencia es irracional. Ahora podemos dividir [0, 1] en clases de equivalencia en donde cada una de éstas consiste en un conjunto de números que son equivalentes. Por ejemplo, dos números escogidos de una clase dada difieren en un número racional y dos números escogidos de clases diferentes discrepan en un número irracional. El intervalo [0, 1] consiste en un número incontable de clases, cada una de las cuales consta de un número contable de miembros.

Usando el Axioma de elección, podemos formar un subconjunto de [0, 1] seleccionando un y sólo un número de cada clase de equivalencia. Conocido como el *conjunto de Vitali* lo designamos como M. Demostraremos que M es no mensurable.

Para cada número racional q, sea $M_q = M + q = \{x + q: x \in M\}$. O sea que M_q es M desplazado q unidades a la derecha si q es positivo y a la izquierda si q es negativo. Llamamos a M_q una traslación de M. Nótese que $\cup\{M_q : q$ es racional$\} = (-\infty, \infty) =$. Hemos dividido el conjunto de todos los números reales en una colección contable de conjuntos disjuntos congruentes.

Decimos que M es no mensurable y lo demostramos por contradicción. Primero suponemos que M es mensurable. Luego, para cada número racional q, $m(M_q) = m(M)$. Si $m(M) = 0$, entonces $m(\Re) = 0$ porque $\Re = \cup \{M_q : q$ es racional$)$. Esto, evidentemente, es imposible. Pero $m(M) > 0$ también es imposible porque se inferiría que

$$m([0, 2]) \geq (\cup\{M_q : q \text{ es racional y } 0 \leq q \leq 1\}) = \sum_{0 \leq q \leq 1} m(M_1) = \infty.$$

Esto también es imposible pues $m([0, 2]) = 2$. Por consiguiente M (y cada M_q) es no mensurable de Lebesgue.

Algunos podrían discrepar en cuanto a la existencia de tales conjuntos; pero ¡así son las matemáticas! Los conjuntos no mensurables desempeñan un papel fundamental en el teorema de Banach-Tarski: que la esfera se puede descomponer en subconjuntos, algunos de los cuales son no mensurables. Seguidamente exponemos algunas paradojas menos aparatosas que implican la construcción de Vitali.

Un subconjunto de [0, 2] puede dividirse de tal modo que las piezas se puedan trasladar de modo que su unión sea la recta total de los números reales.

Asombra esta afirmación porque no hay en ella estiramiento (amplificación) en el sentido en que se vio antes en este capítulo. Las piezas se trasladan isométricamente (se conserva la distancia) de modo que constituyan la recta entera de los números reales. (La solución de esta rareza es semejante a la solución del propio teorema de Banach-Tarski. Se abundará sobre esto en el capítulo 6.)

Para demostrar lo anterior, tomemos $\cup\{M_q : q \text{ es racional y } q \in [0, 1]\}$ como la partición de un subconjunto de [0, 2]. Como el conjunto de los racionales que pertenecen a [0, 1] es un conjunto numerable y el conjunto de todos los números racionales también lo es, podemos poner los racionales de [0, 1] en correspondencia biunívoca con todos los números racionales. Sea dada esta correspondencia por la función $f(q) = r$, donde q es un número racional de [0, 1] y r es número racional irrestricto. Para cada q, trasládese M_q a $M_{f(q)} = M_r$. Nótese que $\cup\{M_r : r \text{ es racional}\} = (-\infty, \infty) = \Re$. Por tanto, los subconjuntos de la partición original han sido desplazados respectivamente de modo que formen la totalidad de la recta de los números reales.

Igualmente notable es el resultado que se encuentra construyendo el conjunto de Vitali sobre la circunferencia de un círculo. Demostraremos lo siguiente:

Se puede dividir en partes un círculo de cualquier radio en dos conjuntos de modo tal que cada uno de ellos pueda descomponerse y rearmarse para formar el círculo original completo.

¡Dos círculos de uno! Suena como si nos estuviéramos acercando al teorema de Banach-Tarski.

Formamos el conjunto de Vitali sobre el círculo llamando equivalentes a dos puntos si uno de ellos puede obtenerse por el otro mediante rotación por un múltiplo racional de una revolución. (Procuramos que este número racional esté entre cero y uno.) Esto es análogo al anterior conjunto de Vitali en que dos puntos se consideraron equivalentes si la distancia entre ellos era racional. Como antes, dividimos en partes el conjunto en clases de equivalencia y usamos el axioma de elección para definir un conjunto M que consista exactamente en un punto de cada clase. Como los racionales entre cero y uno forman un conjunto numerable, podemos designar las rotaciones como ρ_1, ρ_2, ρ_3... Luego, sea ρ_1 M para i = 1, 2, 3, ...

El círculo completo lo da $\cup\{M_i : i = 1, 2, 3, ...\}$. Como todos los M_i son congruentes, podemos hacer rotar individualmente los M_i con índice par, para que coincidan con todos los M_i, como en la figura 4.25.

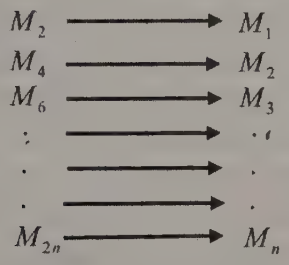


Figura 4.25. Se hacen rotar los subconjuntos con subíndices pares para formar el círculo completo.

Así, pues, los M_i pares pueden hacerse rotar individualmente para formar el círculo completo. De modo similar podríamos hacer rotar los M_i con índice impar, para formar el círculo completo (figura 4.26).

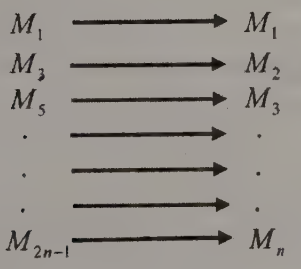


Figura 4.26. Haciendo rotar los subconjuntos con índice par para formar el círculo completo.

En resumen, hemos particionado el círculo original en dos subconjuntos de modo tal que cada uno de ellos fuera equidescomponible en el círculo original. ¡Dos círculos de uno! Esta construcción merece verdaderamente ser descrita como una de las antecesoras de la paradoja de Banach-Tarski.

Podríamos valernos de razonamientos semejantes para producir cualquier número de círculos a partir del círculo original. Por ejemplo, para formar tres círculos del original, definamos el M y el M_i como antes y luego hagamos rotar el M_i como se muestra en la figura 4.27.

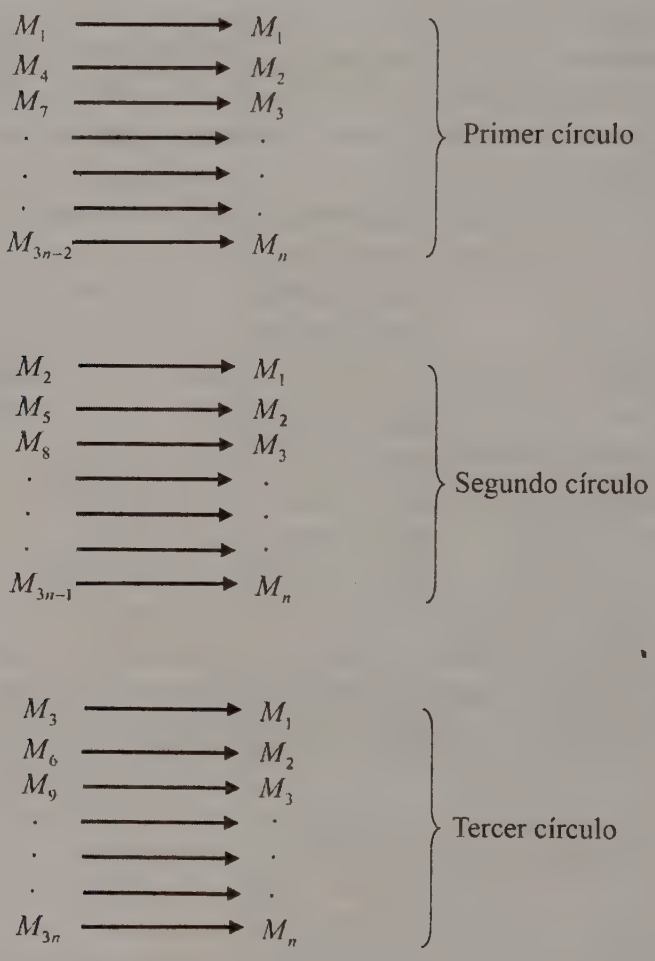


Figura 4.27. Tres círculos de uno.

EL DICCIONARIO HYPERWEBSTER DE STEWART

Ian Stewart, profesor de matemáticas de la Universidad de Warwick y uno de los autores más conocidos de matemáticas populares, da un maravilloso ejemplo de descomposición paradójica que implica muy poco a las matemáticas. Sin embargo, la descomposición es en muchos aspectos semejante a la descomposición efectuada en el teorema de Banach-Tarski. En *From Here to Infinity* [De aquí al infinito], Stewart habla [Stewart 96, pp. 175-176] del diccionario último: el *Hyperwebster*, que contiene todas las palabras posibles formadas usando las veintiséis letras del alfabeto inglés. Las palabras, cada una de las cuales consiste en un número finito de letras, son puestas en lista ordenada alfabéticamente. El diccionario es sencillamente una lista de palabras, tengan o no sentido, sin ir acompañadas de ninguna definición.

La lista comienza con A, AA, AAA, AAAA, etc. Después de un número infinito de tales palabras encontraríamos AB, seguida de ABA, ABAA, ABAAA, y así sucesivamente. Cada palabra, no importa lo larga que sea y si tiene o no tiene sentido, aparece una sola vez en algún lugar del diccionario. Mostraremos cómo puede descomponerse el *Hyperwebster* de modo similar al de la descomposición de la esfera, de Banach-Tarski. Antes de llegar a eso, consideremos primero algunos otras cualidades notables de este diccionario, que Stewart no menciona.

A pesar del hecho de que el diccionario no da definiciones explícitamente, éstas se pueden encontrar –como palabras individuales– si se sabe dónde mirar para descartar las palabras sin sentido de las dotadas de significado. Por ejemplo, la definición de la palabra *trapecio* está dada por la palabra UNTRAPECIOESUNCUADRILATEROQUENOTIENELADOSPARALELOS. Claro está que también encontraremos la palabra UNTRAPECIOESUNROEDORDEPLASTICO que se presenta como definición de trapecio pero que no es más que un sinsentido. Entonces el diccionario podría no ser particularmente útil como obra de consulta. Sin embargo, las definiciones de todas las palabras en todos los idiomas que usan el alfabeto inglés están contenidas en el diccionario.

¡Y eso no es todo! El *Hyperwebster* es mucho más que un diccionario. Si toda cadena de palabras puede concatenarse para formar una sola palabra (el veloz zorro café → elvelozzorrocafe), se podrán representar como palabras solas artículos, libros y letras de canciones. Por ejemplo, este libro que está usted leyendo ahora aparecería en algún lugar del *Hyperwebster* como una sola palabra que consistiría en alrededor de 300 000 letras. Cada obra publicada (y no publicada), de cualquier clase, en inglés aparecería como una sola

palabra. Las posibles curas a enfermedades en la actualidad incurables aparecería también y haría falta un grupo de médicos expertos para extraer lo útil separándolo de la basura. Es de considerarse que el *Hyperwebster* sería una biblioteca universal que contendría todo lo ya escrito o lo que está por escribirse empleando el alfabeto inglés. ¡Suena como un libro que de ningún modo podría faltar en la biblioteca particular de cualquier persona!

Supóngase que existe la editorial Arriba y Más Allá, S. A., y que decide publicar el *Hyperwebster* en un conjunto de 26 volúmenes. Todas las palabras que empiecen con la letra A en el volumen A; todas las que empiecen con B, en el volumen B, y así sucesivamente. Las palabras están en una lista ordenada alfabéticamente dentro de sus volúmenes respectivos (figura 4.28).

A medida que se acerca la fecha de impresión, la editorial Arriba y Más Allá, S. A. empieza a percatarse de la enormidad de su tarea y decide tomar algunos atajos. Para el volumen A decide omitir la primera letra (A) de cada palabra pues de seguro el lector la conocerá por el título del volumen; así en cuanto a las palabras A. (El procedimiento es semejante a la práctica común de quitar el punto decimal en las tablas de números cada uno de los cuales comienza con punto decimal.) Lo mismo se hará con el volumen B, eliminando la primera letra (B) de cada palabra listada en el volumen. De igual modo se decide omitir la primera letra de todas las palabras contenidas por el *Hyperwebster*. El lector, mentalmente, no tendrá problema en agregar la letra del título del volumen al frente de cada palabra de ese volumen. Arriba y Más Allá, S. A. cree que ahorrará gran cantidad de dinero procediendo del modo descrito, al costo de una ínfima inconveniencia para el lector.

Volumen A: A, AA, AAA, . . . , AB, ABA, ABAA, . . . , ABB, . . .

Volumen B: B, BA, BAA, . . . , BB, BBA, BBAA, . . . , BBB, . . .

C: C, CA, CAA, . . . , CB, CBA, CBAA, . . . , CBB, . . .

.
.
.

Volumen Z: Z, ZA, ZAA, . . . , ZB, ZBA, ZBAA, . . . , ZBB, . . .

Figura 4.28. El *Hyperwebster* de veintiséis volúmenes.

Horas antes de empezar a imprimir, se hace otro descubrimiento en materia de reducción de costos. Al examinar cuidadosamente los 26 volúmenes se ve que todos son idénticos, salvo por sus pastas. Véase la figura 4.28 y compárese el contenido de cada volumen una vez que se elimina la primera letra de cada palabra. ¡El contenido es idéntico! Con excepción de la ilustración, se ha dividido el *Hyperwebster* ¡en 26 ejemplares idénticos de sí mismo! ¿Para qué imprimir 26 volúmenes idénticos como parte de un juego de 26 volúmenes? Se resuelve imprimir sólo el primer volumen (el Volumen A) y cambiar el título de la cubierta de Volumen A a *Hyperwebster*.

Arriba y Más Allá, S. A. revisa por última vez el volumen solo antes de mandarlo a la prensa. Deciden dividir el volumen único en capítulos. Así el capítulo A contendrá todas las palabras que empiecen con la letra A; el capítulo B, con todas las palabras que empiecen con la letra B, y así sucesivamente. Como antes, se decide omitir la primera letra de cada palabra de un capítulo dado pues el lector sabrá, por el título del capítulo, cuál es la letra excluida. Conforme se acerca el momento de imprimir, el personal de Arriba y Más Allá, S. A. se siente frustrado al notar que cada capítulo tiene exactamente el mismo contenido. La razón es la misma que se aplicó a los 26 volúmenes idénticos. Y he aquí que de nuevo Arriba y Más Allá, S. A. tiene que repensar el proyecto y al fin decide publicar sólo el capítulo A. El título, desde luego, se cambia de Capítulo A a *Hyperwebster*.

Y bien, tiene usted todos los elementos para adivinar qué sucede a continuación. El personal de Arriba y Más Allá, S. A. decide dividir el capítulo en 26 secciones –Sección A, Sección B, etc–. Cada vez que están listos para mandar a imprimir descubren que...

En suma, el *Hyperwebster*, aparte de la maravilla de su contenido universal, posee la propiedad adicional de ser descomponible en un número infinito de ejemplares de sí mismo, cada uno de los cuales es descomponible en otro número infinito de ejemplares de sí mismo, etc.

Y por una infinidad de razones, Arriba y Más Allá, S. A. reduce a cero sus pérdidas abandonando el proyecto.

Stewart [Stewart 96, p. 176] observa que, "en espíritu, la paradoja de Banach-Tarski no es más que la paradoja *Hyperwebster* en forma de esfera". Las descomposiciones del *Hyperwebster* producen ejemplares de contenidos idénticos al paso que la versión de la duplicación del teorema de Banach-Tarski produce sólidos de tamaño y forma idénticos.

LA PARADOJA DE SIERPIŃSKI-MAZURKIEWICZ

Al principio de este capítulo, cuando examinamos el desplazamiento al infinito, vimos cómo sería posible descomponer un conjunto de puntos en dos subconjuntos de modo tal que uno de ellos fuera congruente con el conjunto original. Por ejemplo, el conjunto de puntos {1, 2, 3,...} se puede descomponer en los dos subconjuntos {1, 2} y {3, 4, 5...} con éste último siendo congruente con el original al desplazar dicho conjunto (desde el infinito) dos unidades a la izquierda. El conjunto {1, 2} es improcedente para este razonamiento y lo descartamos.

El matemático polaco Waclaw Sierpiński (1882-1969) se preguntó si sería posible descomponer un conjunto E en dos subconjuntos disjuntos E_1 y E_2, de tal manera que cada subconjunto fuese congruente con el conjunto original E. Dicho de otro modo, dado E, ¿existen los subconjuntos E_1 y E_2 en que $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, $E_1 \cong E_2 \cong E$?

El alumno de Sierpiński, Stefan Mazurkiewicz (1888-1945) respondió afirmativamente definiendo tal conjunto en el plano. Al resultado, conocido como la Paradoja de Sierpiński-Mazurkiewicz, se llega sin usar el axioma de elección y tiene el sabor de 1 = 2 de la paradoja de Banach-Tarski.

(Vale la pena notar que Sierpiński y Mazurkiewicz fueron los cofundadores de *Fundamenta Mathematicae*, la revista que publicó el teorema de Banach-Tarski.)

Consista E en el origen 0 y todos los puntos obtenibles de 0 por una combinación finita de las siguientes dos operaciones:

1. Trasládese a la derecha una unidad.
2. Hágase rotar en contra del sentido de las manecillas del reloj un radián ($180/\pi$ grados) en torno de 0.

E es un conjunto contable de puntos que representan una parte infinitesimalmente pequeña de la totalidad del plano. Mostramos en el apéndice de este capítulo que cada punto E está representado de modo único por una combinación de traslaciones y rotaciones como arriba se describen. En la figura 4.29 se muestran algunos puntos de E.

Ahora dividimos E en los subconjuntos deseados E_1 y E_2 definiendo E_1 como el conjunto de puntos obtenido al desplazar E a la derecha una unidad y E_2 como el conjunto de puntos obtenido al hacer rotar E un radián en contra del sentido de las manecillas del reloj. Es claro que $E \cong E_1$, $E \cong E_2$ y $E = E_1 \cup E_2$. El hecho de que E_1 y E_2 sean disjuntos (que carezcan de puntos comunes) se analiza en el apéndice de este capítulo. Ahora tenemos la partición deseada.

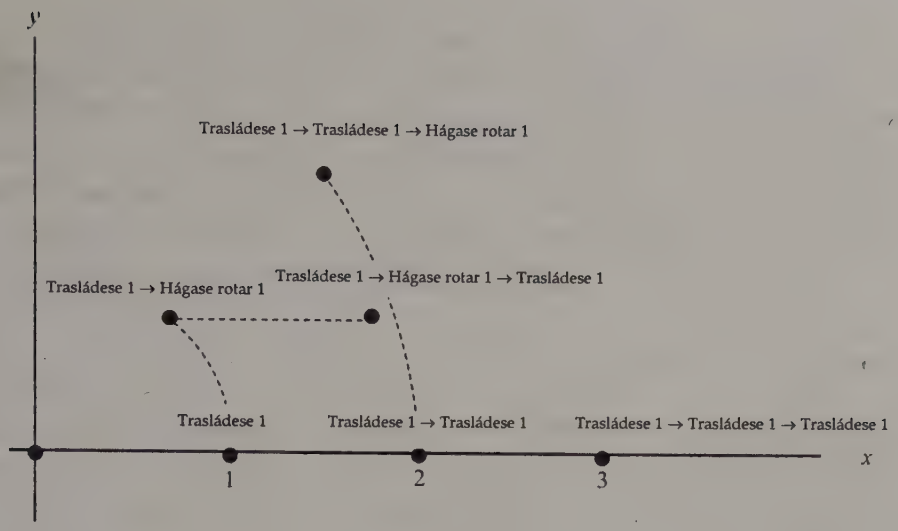


Figura 4.29. Algunos puntos del conjunto E.

Otra manera de ver esta paradoja consiste en considerar cada punto de E como si fuera producido por una sucesión finita de traslaciones y rotaciones. Si denotamos con T la traslación y con R la rotación, entonces, ateniéndonos a la convención sentada en el capítulo 3, podríamos describir cada punto de E mediante una cadena finita de letras con las transformaciones ejecutadas de derecha a izquierda.

Digamos que la primera transformación será el carácter de la extrema derecha y que la última transformación será el carácter de la extrema izquierda. Entonces, una traslación seguida de una rotación será denotada con la "palabra" RT y tres traslaciones seguidas por dos rotaciones, por la palabra RRTTT. Todo punto de E será asociado con tal palabra. (Describimos el origen 0 con la palabra R, ya que hacer rotar el origen produce este mismo. Para evitar confusiones ulteriores, esta será la única palabra cuyo carácter más a la derecha es la letra R. Por ejemplo, TRR se describe mejor como T.)

En la figura 4.30 se emplea esta convención para identificar los puntos de la figura previa.

Ahora podemos pensar en E_1 como todos los puntos, o *palabras*, cuyo carácter de la extrema izquierda es T. Del mismo modo se describe E_2 usando todas las palabras cuyo carácter de la extrema izquierda es R. Recuérdese que hemos convenido en no enumerar las palabras cuyo carácter de la extrema derecha sea R (con la excepción del origen –denotado con R) para evitar representaciones múltiples de cada punto.

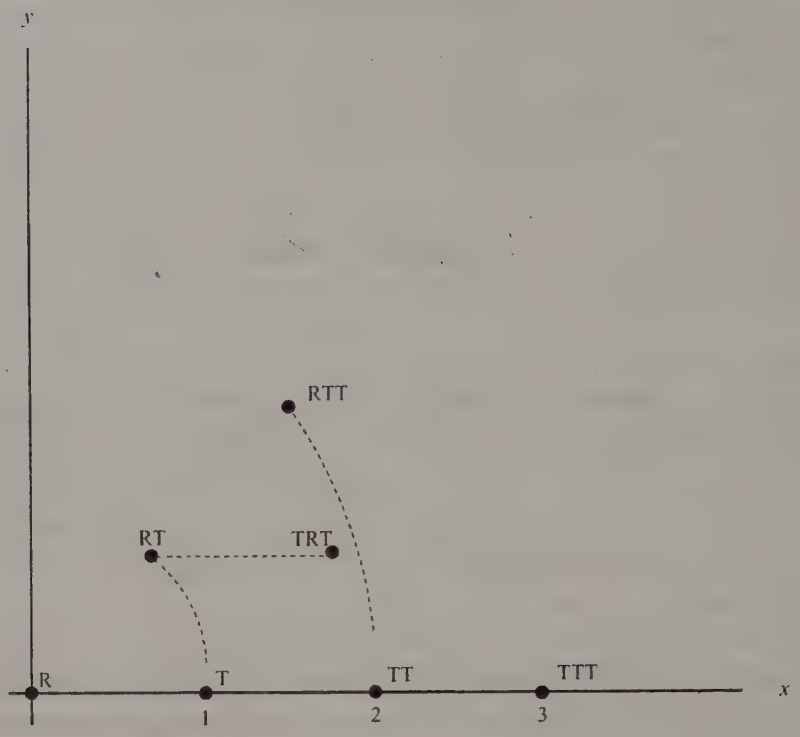


Figura 4.30. Puntos del conjunto E como *palabras*.

Así, pues, los conjuntos E_1 y E_2 se describirían como sigue, si las palabras de cada uno de ellos se dan en orden de longitud creciente:

E_1: T, TT, TRT, TTT, TRRT, TRTT, TTRT, TTTT...
E_2: R, RT, RRT, RTT, RRRT, RRTT, RTRT, RTTT...

¿Tiene esto aspecto familiar? Podríamos describirlo, a falta de mejor representación, como el *Hyperwebster Sierpiński-Mazurkiewicz*. Para un alfabeto que conste de sólo dos letras R y T podríamos dividir todas las palabras en dos conjuntos, el de las palabras que empiezan con el carácter de la extrema izquierda de T y el de las palabras que empiezan con el carácter de la extrema izquierda de R. Eliminando de todas las palabras de cualquier conjunto el carácter de la izquierda extrema, se producen todas las palabras del conjunto original E. (Remover el carácter más a la izquierda de T produce R porque podemos concebir T como equivalente a TR. Del mismo modo, remover el carácter más a la izquierda de R produce R ya que podríamos pensar en R como equivalente de RR.)

Es de preguntarse si un subconjunto *acotado* del plano (E no está acotado) se puede fraccionar en subconjuntos disjuntos, cada uno de los cuales sea congruente con el original. Se sabe que no puede hacerse con sólo dos piezas [Wagon 85, p. 196]. Veremos en el capítulo 5, como parte de la demostración del teorema de Banach-Tarski, que existen conjuntos acotados de puntos en el espacio tridimensional con la propiedad paradójica que se describió en párrafos anteriores.

APÉNDICE

La paradoja de Sierpiński-Mazurkiewicz fue ilustrada geométricamente como puntos del plano, y mostrada similar al *Hyperwebster* de Stewart. El punto E puede describirse algebraicamente haciendo que los puntos del plano representen números complejos (en el plano complejo). Los lectores familiarizados con las formas trigonométrica y exponencial de los números complejos apreciarán el siguiente análisis.

Todo número complejo $z = a + bi$, $a \in \Re$, $b \in \Re$, $i^2 = -1$, se puede escribir en forma trigonométrica como $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. En notación exponencial escribimos $z = re^{i\theta}$. Trasladar una unidad a la derecha es equivalente a agregar 1 al número. Hacer rotar en contra de las manecillas del reloj un radián es equivalente a multiplicar por e^i. Por ejemplo, los puntos obtenidos trasladando el origen 0 dos unidades a la derecha y seguidamente por una rotación de un radián nos da $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 2e^i$. Hacer rotar este punto un radián más nos lleva a $2e^{2i}$. Desplazando este punto a la derecha una unidad produce $1 + 2e^{2i}$. De ahí que cada punto de E se pueda representar como un polinomio en e^i de la forma $z = a_0 + a_1 + a_2e^{2i} + a_ne^{ni}$, en donde las a_i son enteros no negativos y n es un entero positivo. El conjunto E_1 consta de los puntos con representaciones algebraicas tales como $a_0 > 0$. El conjunto E_2 se compone de puntos con representaciones como $a_0 = 0$. Desplazar cualquier punto (z) a la derecha una unidad agrega 1 a a_0. Hacer rotar cualquier punto (z) un radián en contra de las manecillas del reloj incrementa en una unidad el coeficiente de i de todos los exponentes.

Las propiedades de E dadas en este capítulo deben evidenciarse de la descripción algebraica de E. Es claro que $E = E_1 \cup E_2$. Ahora se aclara por qué $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Si fuera cierto que cada punto de E tuviera dos representaciones polinómicas (dos palabras distintas en las letras T y R), entonces e^i sería la solución a alguna ecuación polinómica. Esto es imposible, pues ya se demostró que e^i es trascendente (no satisface ninguna ecuación polinómica con coeficientes racionales).

.5.

ENUNCIACIÓN Y DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA

El infinito es donde ocurren cosas que no ocurren.
ESTUDIANTE ANÓNIMO

Tanto el enunciado como la demostración del teorema de Stefan Banach y Alfred Tarski son claros y directos. Sólo al contemplar la conclusión del teorema es cuando aparece la magia. En este capítulo se desarrolla la demostración del teorema con cuantos detalles es posible, sin empantanarnos en tecnicismos matemáticos que es mejor dejar de lado para investigarlos fuera de esta exposición. Se mantiene al mínimo la notación matemática; se supone, sin embargo, que el lector está familiarizado con el contenido del capítulo 3. La interpretación y la resolución de la pasmosa conclusión de este teorema se reservan para el capítulo 4.

ENUNCIADO DEL TEOREMA DE BANACH-TARSKI

Una esfera maciza puede desmembrarse en un número finito de piezas y rearmarse de modo tal que se produzcan dos bolas macizas, idénticas a la original en cuanto a tamaño y volumen.

Formalmente, esta versión de duplicación del teorema puede enunciarse como sigue:

La esfera unidad $B = \{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ *se puede descomponer en dos conjuntos* B_1 *y* B_2 *tales que* $B \sim B_1$ *y* $B \sim B_2$. *Aquí "~" significa "es equivalente de descomposición con" o "equidescomponible con".*

Una versión diferente, pero igualmente paradójica del teorema asevera que un sólido de cualquier forma y volumen puede descomponerse y rearmarse para formar otro sólido de cualquier forma y volumen. Tal es la razón de que a veces se llame al teorema la paradoja *del chícharo y el sol*. Se demostrará que esta versión de la amplificación se infiere de la versión de la duplicación.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE BANACH-TARSKI

Sin pérdida de generalidad, nos concentramos en una bola de radio uno (la bola unidad) centrada en el origen del sistema de coordenadas (rectangulares) cartesianas *xyz*. Consideremos la esfera como un conjunto de puntos $B = \{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ (figura 5.1).

Demostraremos que B se puede dividir en un número finito de conjuntos y rearmarse de modo tal que forme dos copias de sí mismo $-B_1$ y B_2.

La demostración se hace en tres pasos. En el paso 1 se crea un grupo de rotaciones de la esfera unidad (superficie de la bola). En el paso 2 se aplican estas rotaciones para particionar la esfera en subconjuntos que posean una propiedad notable conocida como la Paradoja de Hausdorff. Por último, en el paso 3 se extiende la propiedad mencionada de la superficie esférica a la pelota maciza, es decir, a la esfera sólida. Con esto concluye la demostración de la versión de duplicación del teorema de Banach-Tarski.

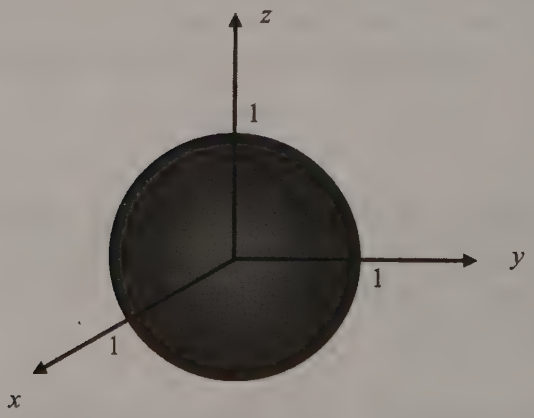


Figura 5.1. La esfera unidad B.

Paso 1. El grupo de rotaciones G

La *rotación* de una figura (un conjunto de puntos) en torno de un eje en el espacio tridimensional es un movimiento rígido tal que cada punto de la figura se mueve siguiendo una trayectoria circular alrededor del eje en un plano perpendicular a dicho eje. Dicho lo anterior, podemos suponer que una rotación es precisamente lo que se esperaría que fuese: un giro de la figura de modo que ésta no se distorsione.

Empezamos definiendo dos rotaciones básicas de la esfera unidad. Denotemos con τ una rotación de 120 en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del eje de las z y con σ una rotación en el sentido de las manecillas del reloj en torno de la línea z = x en el plano xz. Esta recta pasa por el origen y forma un ángulo de 45 con el eje de las z (figura 5.2).

Estas dos rotaciones básicas se pueden combinar de modo secuencial en un número incontable de maneras para producir un número infinito de otras rotaciones. Por ejemplo, dos rotaciones τ, denotadas como $\tau\tau$ $o\tau^2$, corresponden a una rotación de 360 en torno de la recta $z = x$ y la esfera giraría por completo hasta volver a su posición original. A esta clase de rotación le llamamos rotación de identidad y la denotamos con I. De ahí se infiere que $\tau^3 = \sigma^2 = I$.

La rotación simple equivalente a τ seguida de σ es $\sigma\tau$. Nótese que usamos la convención adoptada previamente de escribir las rotaciones de derecha a izquierda y poniendo al principio de la lista la rotación a la extrema derecha y las rotaciones subsiguientes de derecha a izquierda.

Las rotaciones compuestas de estas rotaciones básicas deben escribirse siempre en forma reducida o simplificada. Por ejemplo, la rotación τ^7 es preferible escribirla como τ porque $\tau^7 = \tau^4\tau^3\tau = II\tau = \tau$. Del mismo modo, $\tau^4\sigma^3\tau$ se reduce a $\tau\sigma\tau$ porque $\tau^4\sigma^3\tau = \tau^3\tau\sigma^2\sigma\tau = I\tau I\sigma\tau = \tau\sigma\tau$.

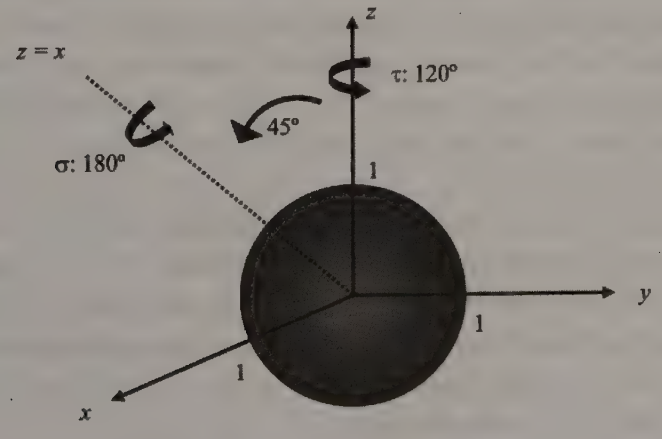


Figura 5.2. Rotaciones básicas τ y σ.

Así, cualquier rotación (salvo *I*) compuesta de una sucesión de las rotaciones básicas se puede escribir, en forma reducida, como una cadena de símbolos, cada uno de la forma τ, τ^2 o σ. Definimos la *longitud* de una rotación como el número de tales símbolos empleados para definir la rotación. Entonces, la longitud de la rotación $\sigma\tau^2\sigma\tau$ es cuatro. (Definimos como cero la rotación de *I*.) Se le recuerda al lector que estas cadenas deben leerse de derecha a izquierda. O sea que la rotación simple de $\tau\sigma\tau^2\sigma$ debe concebirse como la rotación de σ seguida de τ^2, luego de σ y por último de τ.

En fin, hay innúmeras rotaciones posibles formadas como se explicó y a la colección de rotaciones posibles le llamamos grupo de rotaciones G.

El siguiente teorema es clave para nuestra exposición. Su demostración se da en el apéndice de este capítulo.

El teorema de Unicidad

Cada rotación de G tiene una única representación de forma reducida. Esto significa que si dos rotaciones de forma reducida parecen ser diferentes, es que representan en realidad rotaciones físicas diferentes.

Habiendo definido este grupo de rotaciones G, procedemos ahora a descomponer G en tres subconjuntos: G_1, G_2 y G_3. Especificaremos una regla que asigne a cada rotación de G uno y sólo uno de los subconjuntos. Piénsese en las asignaciones como un proceso de clasificación, que coloca las rotaciones, una por una, en sus subconjuntos correctos. Se hacen las asignaciones siguiendo el orden de las longitudes de las rotaciones, empezando con la rotación de identidad *I*, luego las rotaciones de longitud uno, dos, etc. Desde luego, es un proceso infinito en que cada miembro de G recibe por último su asignación a uno de los tres subconjuntos. Es un proceso repetitivo ('recursivo' dicen los matemáticos) en que una asignación de rotación se basa, en parte, en una asignación de rotación previa.

El proceso de asignación se resume claramente en la figura 5.3. El proceso empieza asignando la rotación de identidad *I* a G_1, τ y σ a G_2 y τ^2 a G_3. En este punto, se han asignado todas las rotaciones de longitud uno. Como se indicó, se hacen las asignaciones para todas las rotaciones de longitud dos. Luego se hace posible asignar las rotaciones de longitud tres, cuatro y así sucesivamente.

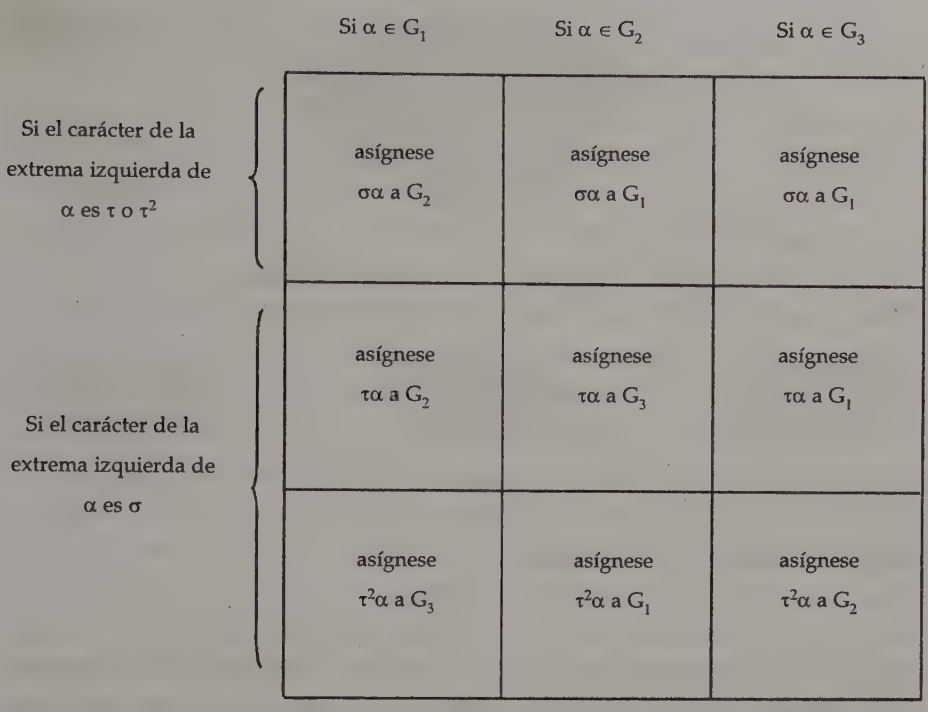


Figura 5.3. División en partes de G en G_1, G_2 y G_3.

Por ejemplo, hemos hecho las asignaciones de todas las rotaciones de longitud uno y ahora deseamos asignar las rotaciones de longitud dos a sus respectivos subconjuntos. La rotación $\tau\sigma$ se asignaría a G_3 porque σ (teniendo un carácter a la extrema izquierda de σ) ya ha sido asignada a G_2 y anexando τ en frente nos obliga, por el esquema, a colocar $\tau\sigma$ en G_3. Para asignar, digamos, $\sigma\tau^2$, notamos que τ^2 (que tiene un carácter al extremo izquierdo de τ^2) ya ha sido asignado a G_3. Adjuntar σ a la izquierda requiere de que asignemos $\sigma\tau^2$ a G_1. Cuando pasamos a asignar las rotaciones de longitud tres y deseamos asignar $\tau\sigma\tau^2$ a su subconjunto, decidiríamos asignarlo a G_2 porque $\sigma\tau^2$ (que tiene un carácter a la extrema izquierda de σ) ya ha sido asignada a G_1 y poner τ en frente nos exige que coloquemos $\tau\sigma\tau^2$ en G_2.

Unos cuantos miembros de los subconjuntos G_1, G_2 y G_3 se muestran en la figura 5.4. Nótese que como consecuencia del teorema de Unicidad, al hacer la lista de todas las rotaciones de G, el proceso continúa *ad infinitum*, y cada una de ellas es físicamente única.

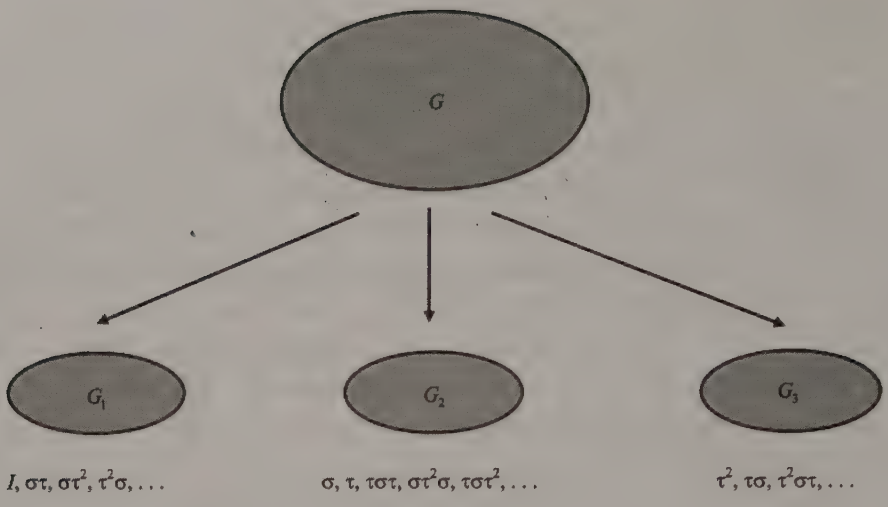


Figura 5.4. Miembros de los subconjuntos.

Una manera ingeniosa de imaginar la creación y clasificación de las notaciones es la ideada por Robert French, actualmente en la Universidad de Lieja, Bélgica. Ideó una máquina tipo Rube Goldberg (French 88, p. 27), que construye las rotaciones y las asigna a sus respectivos conjuntos G_1, G_2 o G_3. El esquema muestra el aparato que consiste en tres tolvas, tres adicionadores, tres asignadores (clasificadores) y tres bolsas de recolección, llamadas G_1, G_2 y G_3 (figura 5.5).

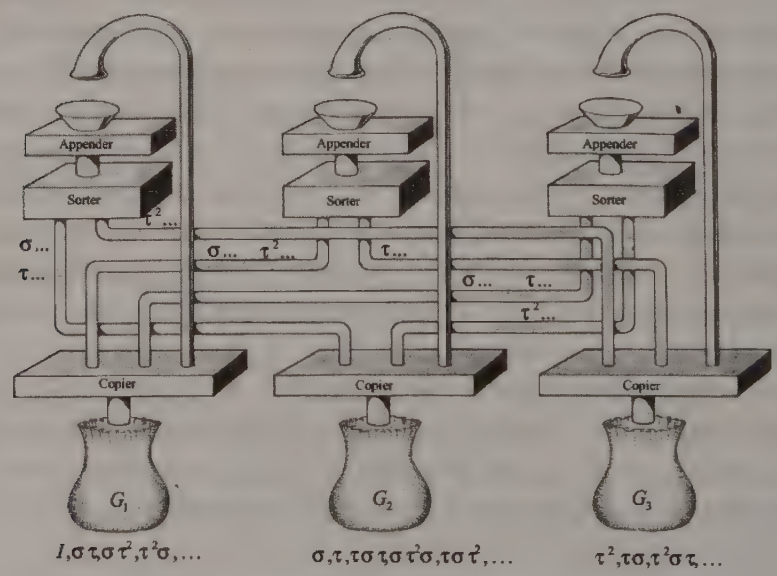


Figura 5.5. La productora de rotaciones de Robert French (French 87). [Reimpresa con autorización de Springer-Verlag.]

Las tolvas reciben copias de rotaciones creadas y clasificadas previamente, enviadas a aquéllas por los copistas. Cada rotación copiada es pasada posteriormente al adicionador que incrementa la longitud de la rotación en uno, de todas las maneras posibles, agregando σ, τ o τ^2 al extremo izquierdo. Por ejemplo, la rotación $\sigma\tau$ sería agregada (a la izquierda) y produciría $\tau\sigma\tau$ y $\tau^2\sigma\tau$. No hay otra manera de incrementar la longitud en uno (a la izquierda) y conservar la rotación representada en forma simplificada. El asignador envía entonces cada rotación recién creada a un copista específico, basado en el carácter de la extrema izquierda, como lo indica el esquema. El copista hace una copia de la nueva rotación, envía la copia a la tolva, como se muestra, y deja caer la rotación recién producida en la bolsa de colección, abajo. El proceso continúa, y las tres bolsas inferiores siguen acopiando sus rotaciones.

Para poner en marcha el proceso, comenzamos por colocar la rotación de identidad I en G_1 para enseguida colocar una copia de I en la tolva de la extrema izquierda, arriba de G_1. El resto es automático pues la máquina hace todo. La rotación de identidad I (de longitud cero) se agrega para formar las tres rotaciones de longitud uno: σ, τ y τ^2. El asignador envía σ y τ a G_2, como lo muestra el esquema. La rotación τ^2 es enviada a G_3. Las rotaciones son copiadas y luego dejadas caer en las bolsas coleccionadoras. Las copias se envían a las tolvas, arriba, y el proceso continúa *ad infinitum*.

Los tres subconjuntos producidos así están relacionados de un modo peculiar pero significativo. Cualquier rotación dada de G_1, si es seguida de inmediato por la rotación básica τ (denotada escribiendo τ inmediatamente a la izquierda de la rotación dada), produce una rotación en G_2. Además, *todas y cada una* de las rotaciones en G_2 se relacionan con una rotación específica en G_1. De hecho, podría pensarse que G_2 es el conjunto de todas las rotaciones de G_1, cada una de ellas seguida por τ (con τ anexada a la izquierda).

Matemáticamente, escribimos $\tau G_1 = G_2$. Del mismo modo, podemos verificar que $\tau^2 G_1 = G_3$. Y, por último, podría verificarse que siguiendo cada rotación en G_1 por σ (anexando σ a la izquierda) obtendríamos cada rotación en $G_2 \cup G_3$. Escribimos $\sigma G_1 = G_2 \cup G_3$.

En resumen, se sostienen las siguientes relaciones entre los subconjuntos:

$$\tau G_1 = G_2$$
$$\tau^2 G_1 = G_3$$
$$\sigma G_1 = G_2 \cup G_3$$

En el apéndice de este capítulo hay una demostración formal de la primera de estas ecuaciones. Las demostraciones de la segunda y la tercera ecuaciones se omiten por ser análogas a la de la primera.

Para el lector, estas relaciones pueden parecer insignificantes; sin embargo, implicamos estas propiedades en el paso 2 de la demostración. Gracias a ellas se inducirá una partición notable de la esfera unidad, la paradoja de Hausdorff, que algunos considerarían tan notable como el propio teorema de Banach-Tarski. En el paso 3 de la demostración aplicaremos la partición de la esfera establecida en el paso 2 para inducir la partición de la esfera como lo especifica el teorema de Banach-Tarski.

Paso 2. Partición de la esfera unidad B

En este paso de la demostración, tomaremos la esfera unidad, la superficie o *cáscara (piel)*, la separaremos y rearmaremos en dos conjuntos, cada uno de ellos de forma idéntica a la esfera unidad original. Lo menos que puede decirse es que esto es paradójico y muchos lo consideran tan insólito como el teorema de Banach-Tarski mismo. Lo cierto es que cuando hayamos dividido la esfera unidad en el paso 2, sólo faltará otro pasito para extender el proceso a la esfera maciza, lo que haremos en el paso 3.

Hay dos instrumentos matemáticos esenciales que necesitamos en el paso 2. Primero, son indispensables las tres relaciones entre los subconjuntos de G, tal y como se establecieron. Segundo, necesitaremos recurrir al Axioma de elección. Los argumentos expuestos en el paso 2 son claros y directos y nos llevan por la paradoja de Hausdorff al final del camino: la conclusión de las *dos esferas a partir de una.*

Empezamos por notar que cada rotación en G de la esfera unidad tiene dos *polos*. Un polo es un punto que permanece fijo durante una rotación. Por ejemplo, la rotación τ, en que la esfera unidad gira 120 en torno del eje z, tiene los dos polos (0,0,1) y (0,0,-1), algo muy parecido a los polos norte y sur de la Tierra. Así que cada rotación en G tiene un eje y en los extremos del eje encontramos los dos polos asociados con la rotación. Porque cada rotación en G tiene dos polos y hay un número infinito de rotaciones en G, sabemos que hay un número contable de polos en la esfera unidad asociados con G. Sea P el conjunto de todos los polos asociados con G sobre la esfera unidad. Sea S-P todos los demás puntos sobre la esfera. Evidentemente hay un número infinito de puntos tanto en P como S-P. Sin embargo, hay muchos más puntos en S-P que en P. Recuérdese lo dicho en el capítulo 3: hay órdenes de infinitos y, en cierto sentido, algunos infinitos son más grandes que otros.

Dicho de otro modo, si se escogiera al azar un punto de la superficie de la esfera, es casi seguro que pertenecería a S-P, y no a P. La parte fraccionaria de la esfera que corresponde a P es infinitamente pequeña.

Puede pensarse que cada punto de S-P está conectado a un infinito numerable de otros puntos de S-P por medio de las rotaciones en G. Si cualesquiera dos puntos de S-P están conectados así, decimos que pertenecen a la misma *órbita*. Hay un número infinito e incontable de tales órbitas que constituyen S-P. Usamos ahora el axioma de elección para escoger un punto de cada una de estas órbitas y definimos colectivamente estos puntos así escogidos como el conjunto C. No hay otra manera de hacerlo sin recurrir al Axioma de elección. Estas órbitas no tienen ninguna cualidad que nos permita definir un miembro de cada una de ellas. Debemos concretarnos a suponer que tal elección es posible y creamos el conjunto C, escogiendo exactamente un punto de cada una de estas órbitas. El conjunto de puntos C se llama *conjunto de elección*, pues fue formado aplicando el Axioma de elección.

La superficie de S consta, en suma, de un conjunto de polos P, y los puntos restantes S-P. Estos puntos restantes S-P se separan naturalmente en un número infinito de órbitas. Recurrimos al axioma de elección para crear un conjunto C escogiendo un punto de cada una de estas órbitas.

Hacemos las observaciones siguientes respecto de C:

1. C es infinito e innumerable.
2. C y P no tienen puntos en común.
3. Ningún punto de C puede hacerse rotar para que coincida con otro punto de C por medio de ninguna de las rotaciones de G.
4. Si cada punto de C rotara con cada rotación de G, entonces terminaríamos por llegar a cada punto de S-P.

Téngase presente que el conjunto S-P representa casi cada punto de la esfera S con excepción de los polos P. Nos orientaremos ahora hacia el conjunto S-P, y posteriormente nos ocuparemos de los polos.

Si aplicamos cada rotación de G_1 a C, tendremos un conjunto de puntos sobre la esfera al cual nos referiremos como G_1C. Del mismo modo, si aplicamos cada rotación G_2 a C, conseguiremos otro conjunto de puntos sobre la esfera, al cual denotaremos como G_2C. Por último aplicamos las rotaciones de G_3 a C para obtener G_3C. Estos tres conjuntos de puntos, G_1C, G_2C y G_3C forman una partición de S-P. Lo cual significa que estos tres conjuntos son disjuntos (no tienen puntos en común) e incluyen a todos los puntos de S-P.

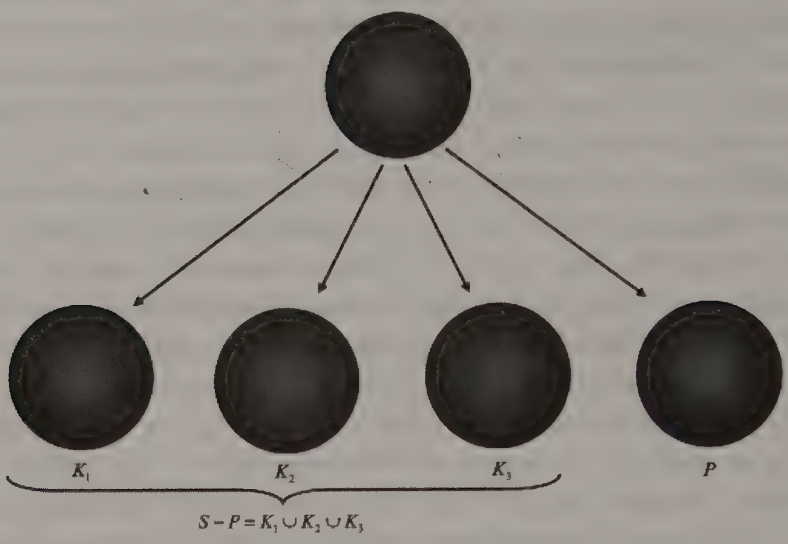


Figura 5.6. La partición, de Hausdorff, de S.

Con esto en mente, ahora hemos dividido la esfera entera en cuatro conjuntos disjuntos: G_1C, G_2C, G_3C y el conjunto de los polos. Para hacer un poco más clara la notación, sea $K_1 = G_1C$, $K_2 = G_2G$ y $K_3 = G_3C$. Tenemos ahora la esfera dividida en cuatro conjuntos disjuntos de puntos K_1, K_2, K_3 y P. Podemos escribir $S = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup P$.

La figura 5.6 ilustra cómo hemos dividido la esfera. Recuérdese aquí que estamos dividiendo en conjuntos la esfera S y no la bola B. Estamos dividiendo en partes la superficie de la bola.

Por la definición K_1 y K_2, vemos que si todos los puntos de K_1 se hacen rotar aplicando la rotación básica τ, obtenemos K_2. Así, K_1 y K_2 son congruentes y escribimos $K_1 \cong K_2$. Notamos también que K_3 se obtiene de K_1 haciendo rotar K por τ^2. Entonces $K_1 \cong K_3$. Y, por último, haciendo rotar K_1 por σ nos da $K_2 \cup K_3$. En resumen: $K_1 \cong K_2 \cong K_3 \cong K_2 \cup K_3$.

Esta última afirmación es la paradoja de Hausdorff. A primera vista quizá no parezca paradójica, pero considérese que la esfera S está compuesta, casi en su totalidad, por los puntos de $K_1 \cup K_2 \cup K_3$. Como $K_1 \cong K_2 \cong K_3$, podemos sacar la conclusión de que cada K es aproximadamente *un tercio* de la esfera completa (o al menos un tercio de $K_1 \cup K_2 \cup K_3$). Pero si cada K es congruente con $K_2 \cup K_3$, también podríamos llegar a la conclusión de que cualquier K, digamos K_1, es la mitad de la esfera completa. ¿Qué es esto entonces, un tercio o la mitad? Este dilema de *mitad-tercio* es la paradoja de Hausdorff.

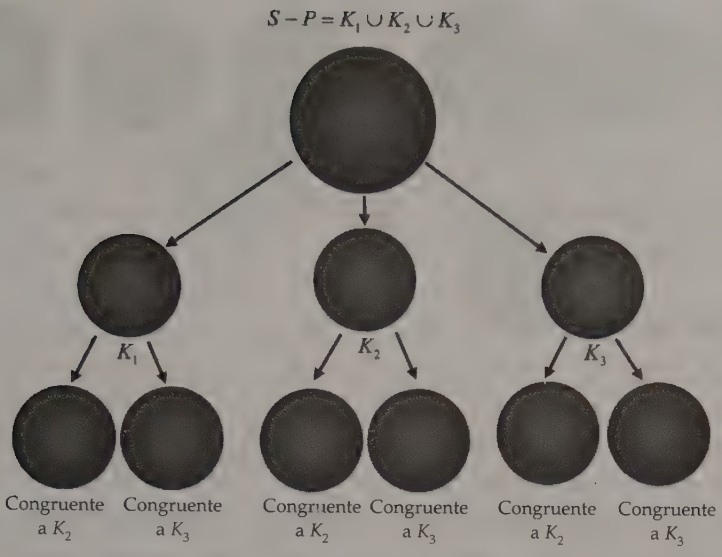


Figura 5.7. Seis subconjuntos de S-P = $K_1 \cup K_2 \cup K_3$.

Como pronto veremos, la paradoja de Hausdorff nos permite disgregar la esfera S en un número finito de piezas que pueden rearmarse para formar dos esferas, cada una de ellas de forma idéntica a la original.

Dividiremos $S\text{-}P = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ en dos copias de sí misma y enfrentaremos el problema de los polos más adelante (figura 5.7). La técnica sugerida por Robert French usa $K_2 \cup K_3$ como *plantilla de corte* que se puede colocar directamente sobre cada K, dividiendo cada uno de ellos en dos conjuntos, uno de los cuales es congruente con K_2 y el otro, con K_3. La plantilla coincidirá perfectamente ya que $K_2 \cup K_3$ es congruente con cada K.

Hemos dividido la esfera S, con excepción de un conjunto de puntos P, contable y relativamente pequeño, en seis conjuntos disjuntos, cada uno de los cuales es congruente con K_2 o K_3, como se ilustró. Pero como $K_1 \cong K_2 \cong K_3$, podemos decir que cualquier K es congruente con cada uno de los otros dos. Así podemos rearreglar estos seis subconjuntos y declarar las congruencias como se muestra en la figura 5.8.

Acabamos de realizar algo notable. Hemos dividido en partes y rearmado el conjunto de puntos $S\text{-}P = K_1 \cup K_2 \cup K_3$, lo que representa casi todos los puntos de la esfera unidad, de tal modo que se forman dos copias idénticas de sí mismo (del conjunto). En lo tocante a que $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ representa virtualmente la esfera unidad S (menos el conjunto de polos P), casi hemos terminado. La mosca en la sopa es P.

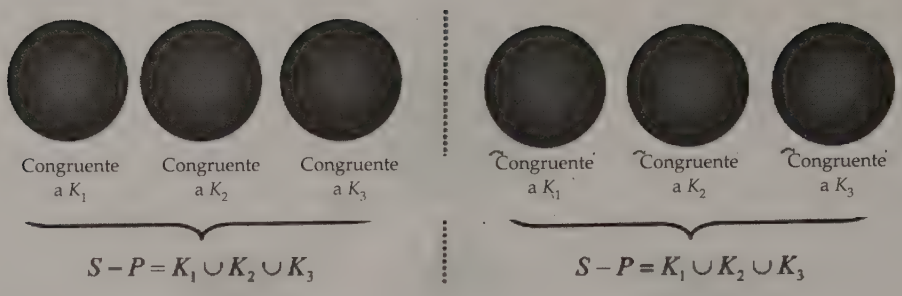


Figura 5.8. Dos copias de S-P = $K_1 \cup K_2 \cup K_3$.

Como se presenta, es fácil deshacerse del problema de los polos. Podemos emplear el conjunto de los polos P de la esfera original para tapar los hoyos que representan a los polos faltantes en una de las dos copias de *S-P*. Así conseguimos una copia completa de *S*. ¿Pero cómo podemos llenar los hoyos de la otra copia de S-P a fin de obtener la segunda copia de la esfera completa? Recuérdese el análisis de la equivalencia de descomposición (equidescomponibilidad) hecho en los capítulos 3 y 4. En el capítulo 4 demostramos que la superficie de una esfera a la que falta un número contable de puntos (hoyos) es equidescomponible en la esfera completa. Aplicamos esta técnica, la de desplazar desde el infinito, al conjunto de puntos S-P para obtener la segunda copia completa de la esfera *S* (figura 5.9).

Así queda completa la segunda esfera y tenemos ahora dos copias completas de la esfera *S* hecha solamente de *S*. Llamemos a estas copias S_1 y S_2 (figura 5.10).

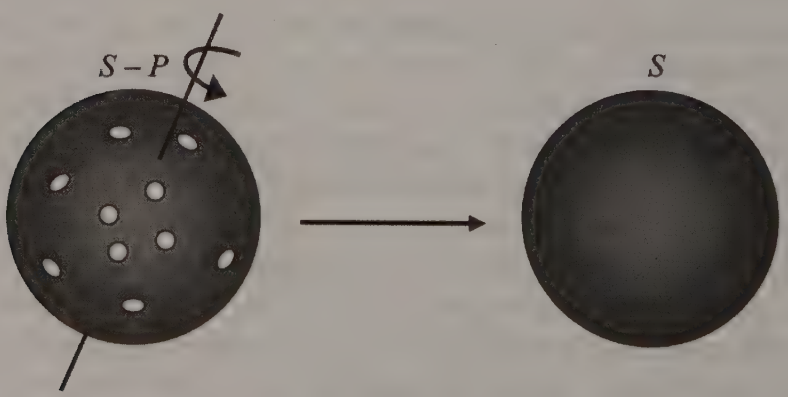


Figura 5.9. Desplazamiento desde el infinito para demostrar que S-P ~ S.

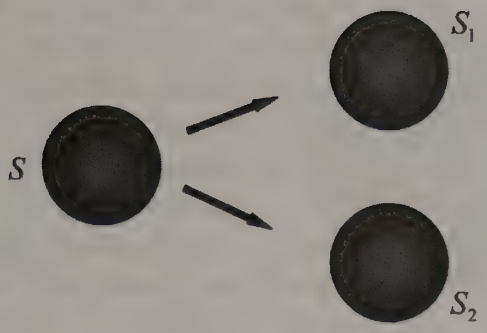


Figura 5.10. Dos esferas de una.

Paso 3. Partición de la bola B unidad en dos copias de sí misma

Hemos atravesado la parte difícil de la demostración. Ahora será asunto bastante sencillo extender la duplicación de la esfera *S* a la duplicación de la bola o pelota *B*.

Para cada subconjunto de *S*, digamos K_1, tal y como se definió en la sección anterior, podemos asociar un *engrosamiento* hacia dentro de la superficie de la esfera hasta el centro (0,0,0) de la bola pero sin incluirlo. Denotamos esta sección engrosada de la bola como K_1. Expresado en otros términos, podemos concebir K_1 como la proyección sobre *S* de todos los puntos que pertenecen a K_1. Desde luego podemos engrosar todos los subconjuntos de *S* del mismo modo:

K_1 se engruesa a $\overline{K}_1$
K_2 se engruesa a $\overline{K}_2$
K_3 se engruesa a $\overline{K}_3$
P se engruesa a $\overline{P}$

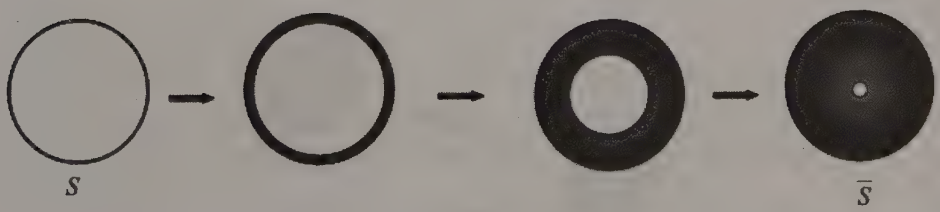


Figura 5.11. Engrosamiento S para formar

Igualmente, S_1 se engruesa hasta $\overline{S}_2$. De hecho, podríamos engrosar la esfera entera S hasta $\overline{S}$, la *bola con hoyos*, como se ilustra en la figura 5.11.

En la sección precedente establecimos varias relaciones entre los subconjuntos de S mencionados en el párrafo anterior. Lo más notable es que establecimos la paradoja de Hausdorff: $K_1 \cong K_2 \cong K_2 \cup K_3$, y la creación de las dos esferas S_1 y S_2, de la sola esfera S. Pero, intuitivamente, todas estas congruencias se sostienen también para los subconjuntos engrosados. Así, podemos afirmar con igual facilidad que $\overline{K}_1 \cong \overline{K}_2 \cong \overline{K}_3 \cong \overline{K_2 \cup K_3}$ y que puede separarse y reorganizarse dentro de S_1 y S_2, cada una de las cuales es una pieza congruente con $\overline{S}$. Como S es la bola unidad con hoyos, y representa todos los puntos de la bola B unidad con excepción del centro, prácticamente hemos demostrado el teorema de Banach-Tarski, salvo en lo tocante a cómo manejar el centro (0,0,0,). Si podemos tapar los hoyos centrales de cada una de las bolas con hoyos $\overline{S}_1$ y $\overline{S}_2$, entonces habremos creado dos pelotas sólidas de una y nuestra demostración habráse completado.

Usamos el centro (0,0,0) de la bola original B para tapar el hoyo del centro de S_1, y obtenemos así una copia completa de la bola. Tapamos el hoyo de la segunda bola con hoyo S_2 mediante la técnica, ahora familiar, de desplazar desde el infinito. Es decir, que consideramos el centro de la bola S_2 con hoyo como uno de los muchos puntos contables escogidos cuidadosamente sobre un círculo contenido por completo en S_2. Desplazando los puntos desde el infinito se llena el hoyo central y ya tenemos completa la segunda copia de B. Llamaremos a las dos copias B_1 y B_2 (figura 5.12). Y así queda concluida nuestra demostración del teorema de Banach-Tarski.

Acabamos de demostrar la versión de *duplicación* del teorema de Banach-Tarski. La *versión de amplificación* o *fuerte* del teorema puede ser aún más sorprendente: *Si A y B son cualesquiera dos conjuntos tridimensionales acotados con interiores no vacíos, entonces* $A \sim B$.

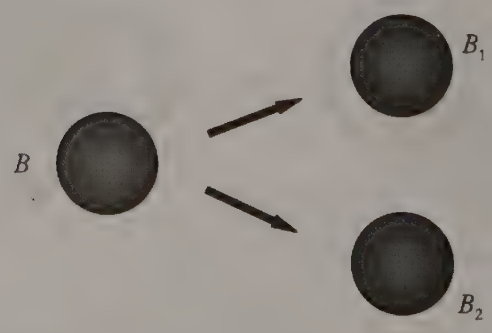


Figura 5.12. Dos bolas de una.

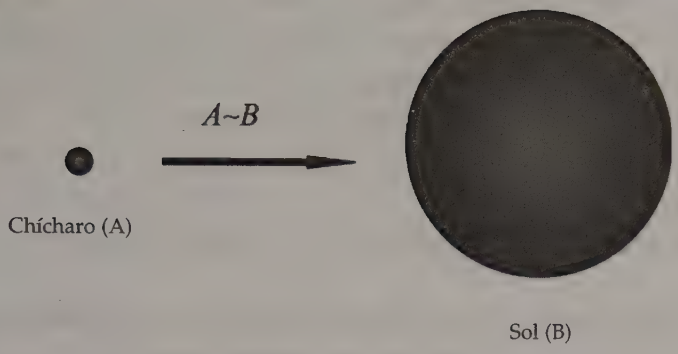


Figura 5.13. La paradoja del chícharo y el sol.

Si, digamos, A es una bola del tamaño de un chícharo y B es una bola del tamaño del sol, entonces en esta versión del teorema de Banach-Tarski se afirma que el chícharo (A) se puede descomponer en un número finito de piezas y rearmarse para formar una bola del tamaño del sol (B) (figura 5.13).

Lo interesante de esta versión del teorema es que no requiere que A y B tengan forma esférica. Ni siquiera necesitan ser idénticas sus formas. Ciertamente, podríamos llamarle a esta versión del teorema la ¡paradoja *del mosquito y el elefante!*

La versión de amplificación del teorema se deduce directamente de la versión de duplicación. Antes de pasar a la demostración debemos establecer un teorema preliminar: el *Teorema de Banach-Shröder-Bernstein* (su demostración se incluye en el apéndice de este capítulo):

Sean A y B dos conjuntos tridimensionales acotados, cada uno de ellos con interiores no vacíos. Supóngase que A es una pieza congruente con un subconjunto de B. Escribimos $A \leq B$. *Supóngase además que B es una equivalencia de descomposición con respecto a un subconjunto de A y escribimos* $B \leq A$. *Se infiere entonces que A es una equivalencia de descomposición con respecto a B; es decir que* $A \sim B$.

Demostramos ahora la versión de amplificación del teorema de Banach-Tarski. Demostraremos que para cualesquiera dos conjuntos A y B, tridimensionales, acotados y con interiores no vacíos, A B. Como podríamos seguir un razonamiento semejante para demostrar que B A, inferiremos que $A \sim B$.

Escójanse bolas sólidas V y W tales que A esté contenida en V y W esté contenida en B. Dupliquemos W (mediante la duplicación de Banach-Tarski) hasta que haya suficientes copias de W que puedan ser trasladadas y superpuestas de modo tal que cubran por completo a

V. Supongamos que hacen falta n copias. Nótese que n copias superpuestas de W son equidescomponibles en un subconjunto de n copias disjuntas de W. Además, el teorema de Banach-Tarski nos garantiza que las n copias disjuntas de W son equidescomponibles a W.

En consecuencia,

A V n copias que se superponen de W n copias disjuntas de W ~ W B,

lo cual establece que A B, se desprende del teorema de Banach-Schröder-Bernstein de que A ~ B. Concluye así la demostración de la versión de amplificación del teorema de Banach-Tarski.

APÉNDICE

Demostración del teorema de Unicidad

Cada rotación en G tiene una representación de forma reducida única. Esto es, si dos rotaciones de forma reducida parecen ser diferentes, en realidad representan rotaciones físicas diferentes.

Para empezar, notamos que cada rotación de forma reducida en G (distintas de I, σ, τ y τ^2) se puede expresar en al menos una de las cuatro formas:

$$\alpha = \tau^{P_1}\sigma\tau^{P_2}\sigma \ldots \tau^{P_n}\sigma$$
$$\beta = \sigma\tau^{P_1}\sigma\tau^{P_2} \ldots \sigma\tau^{P_n}$$
$$\gamma = \tau^{P_1}\sigma\tau^{P_2}\sigma \ldots \sigma\tau^{P_n}$$
$$\delta = \sigma\tau^{P_1}\sigma\tau^{P_2} \ldots \sigma\tau^{P_n}\sigma$$

donde $n \geq 1$ y cada exponente P_i es uno o dos. (Para γ, debemos tener $n > 1$.)

Comenzamos aduciendo el argumento (Osofsky y Adams 78, p. 504) de que ninguna rotación de forma reducida de la forma α puede ser igual a la matriz de identidad I. De aquí demostraremos (de acuerdo con Stromberg 79, p. 154) que ninguna forma de rotación de la forma o puede ser igual a I. Después de haber establecido que ninguna rotación de forma (aparte de la propia I) puede ser igual a I, mostraremos que la representación de forma reducida de cualquier rotación en G en única:

Sea $\tau = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\sigma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

la representación de matriz de τ y σ dada en el capítulo 3. Entonces

$$\tau^P\sigma = \begin{bmatrix} 0 & \pm\sqrt{3} & -1 \\ 0 & -1 & \pm\sqrt{3} \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde tomamos $+\sqrt{3}$ si $P = 1$ y $-\sqrt{3}$ si $P = 2$. Por inducción matemática (o verificación empírica) se infiere que

$$\alpha = \frac{1}{2^n}\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12}\sqrt{3} & m_{13} \\ m_{21}\sqrt{3} & m_{22} & m_{23}\sqrt{3} \\ m_{31} & m_{32}\sqrt{3} & m_{33} \end{bmatrix}$$

donde m_{11}, m_{21}, m_{32} y m_{33} son enteros pares y m_{12}, m_{22}, m_{13} y m_{23} son enteros impares. Considerando los elementos individuales de esta matriz es fácil demostrar que α *I*. Por ejemplo, el hecho de que m_{12} sea impar sugiere que

$$\frac{m_{12}\sqrt{3}}{2^n} \neq 0 \quad \text{y por lo tanto } \alpha \neq I.$$

Ahora puede demostrarse que ninguna rotación puede ser igual a *I* porque, de ser así, entonces $\sigma\sigma = \sigma I\sigma = \sigma^2 = I$, lo cual es contradictorio porque $\sigma\sigma$ es de la forma α, de la cual puede demostrarse que no es igual a *I*.

Procederemos ahora a demostrar que ninguna rotación puede ser igual a *I*. Supongamos que tiene, como en el párrafo anterior, el valor más pequeño posible de n($n > 1$). Si $P_1 = P_n$ entonces o $P_1 = P_n = 1$ o $P_1 = P_n = 2$. Como estos dos casos se tratan del mismo modo, suponemos que $P_1 = P_n = 1$. Luego $= \tau\sigma\tau^P\sigma \ldots \sigma\tau$ y nótese que $\tau^2\tau = \sigma\tau^P\sigma \ldots \sigma\tau^2$, que es de

la forma γ. Pero si $\gamma = I$, entonces $\tau^2\tau = \tau^2 I\tau = \tau^3 = I$, que ciertamente no es de la forma γ. Tenemos entonces una contradicción y $\gamma \neq I$ si $P_1 = P_n = 1$. Con un razonamiento por el estilo se demuestra que $\gamma \neq I$ si $P_1 = P_n = 2$.

Para completar el razonamiento de que ninguna γ puede ser igual a I, consideremos γ cuando $P_1 \neq P$. Supongamos que $\gamma = I$ y llegaremos a una contradicción. Si $n > 3$ entonces $I = \sigma\tau^{Pn}\tau^{P1}\sigma \ldots \sigma\tau^{Pn-1}$ que es de la forma pero contradice la elección de la *n más pequeña posible*. Debe ser, pues, que $n = 2$ o $n = 3$. Si $n = 2$, tenemos $I = \tau^{P2}\tau^{P1} = \sigma$, lo cual es imposible. Y si $n = 3$, tenemos $I = \sigma\tau^{P3}\tau^{P1}\sigma = \tau^{P1}$, que es también imposible. Sacamos en conclusión que $\gamma \neq I$.

Una rotación σ no puede ser igual a I porque, de serlo, tendríamos entonces que $\sigma\ \delta\ \sigma$, que es de la forma , sería igual a I, lo cual ya demostramos que es imposible.

En suma, hemos demostrado que ninguna rotación de forma reducida en G (aparte de la propia *I)* puede se igual a la rotación de identidad *I*. Continuamos estableciendo que todas las representaciones de forma reducida son únicas, y que representan rotaciones físicas distintas.

Supongamos lo contrario. Sea $\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_m = \rho_1\rho_2 \ldots \rho_n$ la representación de la igualdad de dos rotaciones de formas reducidas (diferentes de *I)* en G con representaciones distintas. Así, cada λ y ρ representa τ, τ^2 o σ. Si las representaciones son distintas entonces o $m \neq n$, o, para algunas i, $\lambda_i \neq \rho_i$. Suponiendo que podemos encontrar tal igualdad de dos rotaciones de forma reducida, escojamos dos de ellas tales que m + n sea mínima. Recordando del capítulo 3 que la inversa de la rotación $\rho_1\rho_2 \ldots \rho_n$ está dada por $(\rho_1\rho_2 \ldots \rho_n)^{-1} = \prec \ldots$, afirmamos que

$$(\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_m)(\rho_1\rho_2 \ldots \rho_n)^{-1}$$
$$= \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_m$$
$$= (\rho_1\rho_2 \ldots \rho_n)(\rho_1\rho_2 \ldots \rho_n)^{-1} = I.$$

Para que estas λ y ρ se *colapsen* o reduzcan a I, sería necesario que se simplificaran λ_1. Esto es imposible pues violaría la minimalidad de m + n. En consecuencia, cada rotación en G debe tener una representación de forma reducida única y ya tenemos demostrado el teorema de la unicidad.

Las rotaciones básicas $\tau(120)$ y $\sigma(180)$ se definieron de modo que tuvieran el ángulo de 45 entre sus ejes. Hausdorff mostró que si cos de 2θ fuese trascendente, entonces θ bastaría como ángulo entre los ejes que permitirían la unicidad. Como hemos visto, $\theta = 45$ se desempeña perfectamente.

Demostración de la Primera ecuación de la rotación

Para demostrar que $\tau G_1 = G_2$, demostramos de modo equivalente que r es miembro de G_1 si y sólo si τr es miembro de G_2. Supongamos que ya se clasificaron todos los elementos de G en los subconjuntos G_1, G_2 y G_3 como se especificó en el proceso de asignación expuesto en este capítulo. Supongamos que r no es igual a σ, τ o τ^2, pues, de serlo, la verificación de que "r es miembro de G_1 si y sólo si τr es miembro de G_2" sería trivial. Nótese que τr no necesita tener τ como su carácter de extrema izquierda. Por ejemplo, si el carácter a la extrema izquierda de r es τ^2, entonces el carácter más a la izquierda de τr sería σ.

Caso 1. El carácter más a la izquierda de r es σ

Si r es un miembro de G_1, entonces, por el proceso de asignación descrito en este capítulo, τr es miembro de G_2. Para comprobar la otra dirección, supongamos que τr es miembro de G_2. Nótese en el diagrama "Partición de G en G_1, G_2 y G_3" que las rotaciones son asignadas a G_2 de solamente tres maneras posibles. Como τr es miembro de G_2 y el carácter más a la izquierda de r es σ, se eliminan dos de las tres posibilidades y r debe pertenecer a G_1. En consecuencia, para el caso 1, $\tau G_1 = G_2$.

Caso 2. El carácter más a la izquierda de r es τ

En tal caso $r = \tau p$ cuando el carácter más a la izquierda de p es σ. Supongamos que r es miembro de G_1 y observemos en el diagrama que las asignaciones a G_1 se hacen de sólo cuatro maneras posibles. De modo semejante a lo ocurrido en el caso 1, podemos eliminar tres de las cuatro asignaciones posibles y sacar la conclusión de que p pertenece a G_3. De nuevo, fundándonos en el diagrama, $\tau r = \tau^2 p$ es asignada a G_2.

Para demostrar la dirección inversa, supongamos que $\tau r = \tau^2 p$ es asignada a G_2. Como antes, notamos en el diagrama respectivo que las asignaciones a G_2 se hacen de sólo tres maneras posibles. Como p empieza con σ, debemos concluir que p pertenece a G_3. El proceso de asignación dicta que $r = \tau p$ sea asignada a G_1. Entonces, para el caso 2, $\tau G_1 = G_2$.

Caso 3. El carácter más a la izquierda de r es τ^2

En tal caso, $r = \tau^2 p$ cuando p es el carácter más a la izquierda de σ. Si r es miembro de G_1 y las asignaciones a G_1 se hacen solamente de cuatro

maneras posibles, entonces tres de las cuatro asignaciones posibles se pueden eliminar y sacamos la conclusión de que p pertenece a G_2. De ahí que $\tau r = \tau^3 p = p$ pertenezca a G_2.

Para demostrar la dirección inversa, supongamos que $\tau r = \tau^3 p = p$ pertenece a G_2. Recurriendo al diagrama y notando que el carácter más a la izquierda de p es σ, $r = \tau^2 p$ es asignado a G_1. Así, para el caso 3, $\tau G_1 = G_2$.

Las demostraciones de las ecuaciones de la segunda y las tercera rotaciones son de forma semejante a la demostración anterior y no se desarrollan aquí.

Demostración del teorema de Banach-Schröder-Bernstein

Sean A y B dos conjuntos tridimensionales acotados, cada uno de ellos con interiores no vacíos. Supóngase que A es congruente por equivalencia de descomposición con un subconjunto B. Escribimos $A \prec B$. Suponemos además que B es congruente por equivalencia de descomposición con un subconjunto de A y escribimos $B \prec A$. Se infiere entonces que A es congruente pieza a pieza con B ($A \sim B$).

Duplicamos una demostración común de la teoría del teorema de Schröder-Bernstein. Supongamos que se particiona A y B como sea necesario. Tenemos que los subconjuntos de A (tal y como se definieron por las particiones A) se pueden hacer coincidir con algunos de los subconjuntos de B (tal y como se definieron por las particiones B) mediante movimientos rígidos. Hay, por consiguiente, un mapeo de uno a uno (inyección) de estos subconjuntos de A a ciertos conjuntos de B. Del mismo modo existe un mapeo de uno a uno (inyección) de los subconjuntos de B (tal y como se definieron las particiones de B) a ciertos subconjuntos de A. Representemos con la función *f* el mapeo de A en B (flechas hacia abajo) y representemos con la función g el mapeo de B en A (flechas hacia arriba) (figura 5.14).

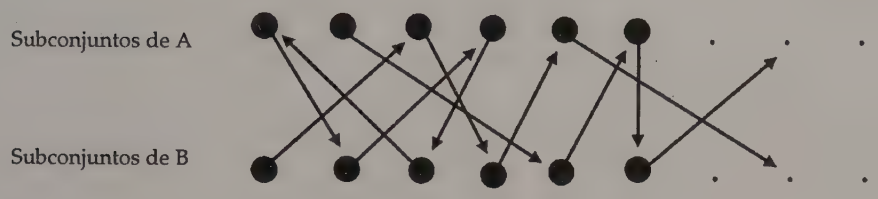
Deseamos demostrar que $A \sim B$ debe indicar que hay una correspondencia biunívoca y una biyección entre los subconjuntos de A y los subconjuntos de B por medio de movimientos rígidos. Esto es, debemos mostrar una función biunívoca y una biyección h que mapee los subconjuntos de A en los subconjuntos de B.

Antes de hacer esto, decimos que un subconjunto (de A o de B) *está basado en* B si al saltar hacia atrás desde el subconjunto termina en B. De no ser éste el caso, sería *basado en A* (que va a parar en A) o sencillamente pudiera no terminar. Nótese que si un conjunto está *basado en* B, enton-

ces también lo están todos sus ancestros (predecesores) y descendientes. Procedemos ahora a definir nuestra función *h* del modo siguiente:

Sea *a* uno de los subconjuntos de A. Defínase

$$h(a) = \begin{cases} g^{-1}(a) & \text{si está basado en B} \\ f(a) & \text{de cualquier otro modo} \end{cases}$$



f está representada por las flechas hacia abajo *g* está representada por las flechas hacia arriba

Figura 5.14. El teorema de Banach-Schröeder-Bernstein.

Mostramos que h es biunívoca y biyectiva. Es evidente que *h* es biunívoca porque g^{-1} y *f* son biunívocas, y ningún subconjunto con base en B puede ser mapeado al mismo subconjunto como si fuera un subconjunto no basado en B. Queda por demostrar que *h* es una suprayección. Sea b uno de los subconjuntos de B. Debemos mostrar que para cualquier b existe un subconjunto a de A tal que h(a)=B. Si b es un subconjunto con base en B, entonces g(b), uno de los subconjuntos de A, es un subconjunto basado en B y hacemos a = g(b), pues entonces h(a) = h[g(b)] = g^{-1}[g(b)] = b. Si b es un subconjunto no basado en B, entonces f^{-1}(b) es subconjunto de A no basado en B y hacemos a = f^{-1}(b), pues entonces h(a) = h[f^{-1}(b)] = f[f^{-1}(b)] = b. En consecuencia, h es tanto biunívoca como suprayectiva; y queda demostrado el teorema de Banach-Schröder-Bernstein.

.6.

SOLUCIÓN

Una de las cosas más molestas que hacen los matemáticos es sembrar dudas en cosas que imaginamos entender perfectamente.

IAN STEWART

Cuando un matemático o un científico produce un resultado que va en contra de la intuición, tal cosa exige una solución. Existen tres posibilidades, cada una de las cuales se expondrá en relación con el teorema de Banach-Tarski.

DECLARAR FALACES LOS RESULTADOS

Quienquiera que obtenga resultados inesperados e increíbles sospecharía que hay un error. El científico barruntaría un error de diseño, un error estadístico o una anomalía experimental atípica de la población en estudio. El matemático presiente un error de cálculo o de lógica. Si verdaderamente hay un error y se lo encuentra, entonces todo el asunto se desecha como una paradoja de tipo 2.

¿Hay error en la demostración del teorema de Banach-Tarski tal y como la desarrollamos en el capítulo anterior? Los cálculos son correctos y la lógica es intachable. Si hay un error, debemos buscar en la parte más vulnerable de la demostración: la aplicación del Axioma de elección. ¿Es correcto emplear este controvertido axioma cuando nos lleva a conclusión tan estrafalaria?

Los críticos del axioma de elección señalan la conclusión del teorema de Banach-Tarski como prueba contundente de por qué no debe emplearse tal axioma. Hacen ver que no hay demostración del axioma y argumentan que no podemos declarar que existe una elección si somos

incapaces de describirla explícitamente. Concretarse a declarar que existe, dicen, no establece, matemáticamente hablando, su existencia.

Los defensores del axioma argumentan que no se requiere de la construcción para demostrar su existencia. Hay en las matemáticas muchos llamados *teoremas de existencia* que establecen la existencia de un objeto matemático, sin realmente construir el objeto cuya existencia está garantizada por el teorema. Los axiomas, por definición, no necesitan ser demostrados. El axioma es extremadamente intuitivo y rechazarlo sería, para algunos individuos, más perturbador que las consecuencias de usarlo. Y, en todo caso, hemos construido *buenas matemáticas* con ayuda de este axioma. Es útil, si no indispensable, en disciplinas como la topología, el álgebra, el análisis funcional y el análisis real. Entonces, ¿por qué rechazarlo?

En la comunidad matemática hay consenso en cuanto a la aceptación del Axioma de elección y en no tirar a la basura el teorema de Banach-Tarski.

ACEPTAR EL TEOREMA TAL CUAL

Si no rechazamos el teorema, enfrentamos entonces la posibilidad de aceptarlo a valor nominal, tal cual, sin intentos de interpretarlo. Esto puede ser para algunos una píldora difícil de tragar, pues el teorema sugiere que volúmenes y masas se pueden duplicar, cuadruplicar y en realidad amplificar hasta que alcancen cualquier tamaño y forma especificados por un proceso mecánico de corte y rearmado.

La historia nos hace ver que no es la primera vez que resultados que al principio parecieron ser increíbles terminaron por ser aceptados. Vienen muy al caso las palabras de Mark Twain (Twain 97, p. 156): "La verdad es más extraña que la ficción, pero esto es así porque la ficción se ve obligada a complacer las posibilidades; la verdad no". Nicolás Copérnico (1473-1543), fundador de la astronomía moderna, propuso en 1530 que la Tierra giraba en torno de su eje diariamente y en torno al Sol en el lapso de un año: teoría heliocéntrica que contradecía abiertamente la interpretación geocéntrica del universo de Claudio Ptolomeo. La teoría copernicana iba en contra de las creencias políticas, filosóficas y religiosas de la época, que atribuían al hombre ser el centro del universo y que todo lo demás giraba en torno a la Tierra. A Galileo, defensor de la teoría copernicana, le ordenaron que renunciara a su teoría y por último fue condenado a pasar el resto de su vida en prisión. Otros defensores de Copérnico, como Johannes Kepler y sir Isaac Newton,

terminarían por convencer a la comunidad científica de la validez de la teoría heliocéntrica.

En su teoría de la relatividad especial Albert Einstein hace afirmaciones que, vistas de pasada, son muy difíciles de aceptar. Uno de sus postulados básicos es que la velocidad de la luz es constante para todos los observadores, independientemente de sus velocidades relativas. Esto es un tanto paradójico, al menos físicamente, igual que el teorema de Banach-Tarski. Con todo, esto es bien aceptado hoy en día.

De los postulados básicos de la relatividad provienen las ecuaciones de Fitzgerald-Lorenz:

$$L' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$M' = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

En estas ecuaciones, c denota la velocidad de la luz (constante) y v denota la velocidad de un objeto con respecto a un observador. Matemáticamente, se predice que ocurrirán fenómenos estrambóticos a medida que el valor de v se aproxime al de c. La primera ecuación nos dice que un objeto de longitud L parecerá encogerse hasta la longitud L', cuando el observador mida la longitud del objeto. El grado de contracción depende de la velocidad v del objeto. Un proceso que toma el tiempo T en el objeto tomará un tiempo mayor, T', cuando lo mida el observador. El factor de dilatación del tiempo depende, como en el caso anterior, de la velocidad del objeto. Por último, la masa del objeto, al ser medida por el observador, aumentará hasta la cantidad M', también en razón de la velocidad.

A manera de ejemplo, considérese un objeto de 50 metros de longitud y 50 kilogramos de masa que se mueve a 90% de la velocidad de la luz (0.90c) en relación con el observador. Cuando éste la mide, la longitud se habrá encogido aproximadamente hasta 22 metros y su masa se habrá incrementado a casi 115 kilogramos. Un suceso que dure

20 segundos en el objeto parecerá durar 46 segundos al ser medido por el observador. Si bien extraordinariamente en contra de la intuición, la validez de las ecuaciones de Fitzgerald-Lorenz se ha verificado en el laboratorio.

Podríamos continuar dando ejemplos extraídos de la teoría de la relatividad, la mecánica cuántica y aun de las propias matemáticas; pero el punto es que cosas que parecen increíbles pueden resultar verídicas.

¿Aceptamos, pues, el teorema de Banach-Tarski tal cual y procedemos a diseñar máquinas de duplicación para incrementar el abasto de alimentos del mundo? Bueno, no exactamente. Mejor daremos un rodeo y adoptaremos la tercera opción, que seguidamente se explica.

REINTERPRETACIÓN DEL RESULTADO

La mayoría de los matemáticos resuelve el teorema de Banach-Tarski como paradoja de tipo 1. Se admite su validez, suponiendo, como hace la mayoría de los matemáticos, que podemos apelar al Axioma de elección. Sin embargo, el teorema no nos permite duplicar barras de oro ni rebanadas de pan para aumentar nuestra riqueza y alimentar al mundo.

Para esclarecer el punto recordemos el concepto matemático de *medida*, tal y como se ofreció en el capítulo 4. La *medida de Lebesgue*, o simplemente la *medida* de un conjunto de puntos, cuantifica la *extensión* del conjunto. Así, quisiéramos que la medida de un intervalo cerrado de números reales [a,b] fuera la longitud del intervalo, $b-a$, y la medida del conjunto de puntos que forman un disco de radio r fuese el área del disco, πr^2. Del mismo modo, la medida de un conjunto de puntos que formen un sólido familiar debería ser el volumen de ese sólido. La medida de un punto aislado es cero.

Nos gustaría que esta *medida* fuese *aditiva de modo finito*. Con lo que pretendemos decir que la medida de la unión de un número finito de conjuntos disjuntos es la suma de las medidas de los conjuntos individuales. Podríamos ser aún más precisos al respecto, pero probablemente el lector ya entendió el concepto. Podemos pensar en la medida como *tamaño* o *extensión*.

En el capítulo 4 vimos que hay conjuntos de puntos que son no mensurables, no medibles. Son conjuntos que simple y llanamente no tienen medida de Lebesgue. A pesar de que existen, su tamaño no tiene medida. Y tal fue el caso en la demostración del teorema de Banach-Tarski en el capítulo 5. El conjunto de puntos C, el conjunto de elección

creado con el Axioma de elección, es no mensurable. Como resultado, todos los conjuntos K_1, K_2, K_3 y K_1, K_2, K_3 son no mensurables. Estos K no tienen área superficial definible y K no tiene volumen definible. Sus medidas no son aditivas de modo finito porque, para decirlo sin ambages, ¡no tienen medidas!

Lo que hace paradójico el teorema de Banach-Tarski es el incremento de volumen por descomposición en partes y rearmado. Parecería que los volúmenes se pueden combinar de varias maneras para crear algo de nada. Pero, de hecho, los volúmenes no se están combinando porque los subconjuntos asociados con el teorema de Banach-Tarski *¡no tienen volúmenes!*

¿Creamos dos bolas de una? ¡En realidad, sí! Pero puntualicemos algo acerca de la paradoja: démonos cuenta de que no estamos sosteniendo algo tan absurdo como que 1 = 1 + 1. Lo único que afirmamos es que la bola se puede particionar y rearmar de un modo en verdad notable, como consecuencia de aplicar el Axioma de elección y la existencia de conjuntos no mensurables. El teorema de Banach-Tarski confirma la existencia de conjuntos no mensurables, ya que si K y K fueran mensurables, entonces no se presentaría el esquivo problema de crear algo de nada. Si bien imposible de construir, la duplicación y el acrecentamiento son válidos en el campo matemático. Éste es uno de tantos casos en que matemáticas y física siguen rutas distintas.

El distinguido físico teórico Richard Feynman no endulza su prosa al tratar este tema en su libro *The Character of Physical Law* [El carácter de la ley física] (Feynman 65, pp. 55-56):

> Quisiera decir unas cuantas cosas sobre la relación de las matemáticas y la física que son de carácter algo más general. Los matemáticos están tratando sólo con la estructura del razonamiento, y en realidad poco les preocupa de qué están hablando. Ni siquiera necesitan *saber* de qué están hablando o, como dicen ellos, sea lo que sea que digan es cierto. Me explico. Establece usted los axiomas, tal y tal es así y tal y tal es asá. ¿Y luego? Se puede seguir un desarrollo lógico sin saber qué significan las palabras tal y tal. Si los enunciados de los axiomas están formulados cuidadosamente y son lo suficientemente completos, no es necesario que el hombre que está razonando sepa el significado de las palabras para deducir conclusiones nuevas en el mismo lenguaje. Si yo uso la palabra triángulo en uno de los axiomas habrá un enunciado acerca de los triángulos en la conclusión, mientras que el dicho hombre que está construyendo el razonamiento puede no saber qué es un triángulo. Pero puedo leer hacia atrás su razonamiento y decir "Triángulo,

no es más que algo de tres lados", y entonces conozco nuevos hechos. En otras palabras, los matemáticos preparan el razonamiento abstracto y están listos para aplicarlo cuando tienen un conjunto de axiomas sobre el mundo real. Pero el físico imprime significado a todas sus frases. Esto es algo muy importante y que la gente que llega a la física procedente de las matemáticas no aprecia. La física no es matemáticas y las matemáticas no son física. Una y otras se auxilian mutuamente. Pero en física se debe comprender la conexión de las palabras con el mundo real. Al final, es necesario traducir lo que concibió en su mente al idioma común, al mundo, a los bloques de cobre y vidrio con los cuales va usted a hacer el experimento. Sólo de ese modo puede usted descubrir si las consecuencias de su razonamiento son verdaderas. Este es un problema que, de plano, los matemáticos no tienen que enfrentar.

El axioma de elección es un axioma de matemáticas, no de física. A pesar de su atractivo físico, carece de garantías físicas. La Paradoja de Hausdorff y el Teorema de Banach-Tarski, que se funda en tal axioma, son matemáticamente verdaderos, en el sentido de que el razonamiento que conduce a los resultados expuestos está libre de contradicciones. Se sigue la pauta *suposición→deducción→conclusión*. Pero la conclusión a la que se llega no tiene necesidad de ser verdadera en el sentido físico.

Un diagrama similar al de la figura 6.1 aparece en *The Mathematical Experience*, de Philip J. Davis y Reuben Hersh (Davis y Hersh 81, p. 129).

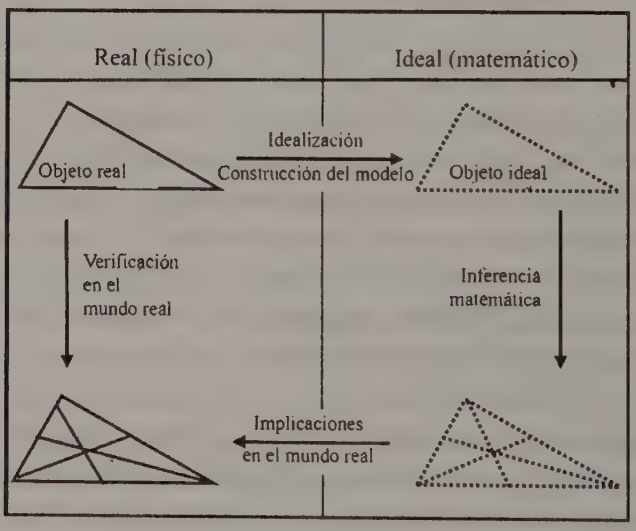


Figura 6.1. Modelación matemática. (Reimpresa con autorización de Springer-Verlag.)

En el caso de Banach-Tarski podemos ser incapaces de dar el paso de "Implicación en el mundo real", que aparece en la parte inferior de la figura. Esto obedece a que no podemos ejecutar físicamente las construcciones que sugiere el teorema. No contiene contradicciones matemáticas; el proceso se interrumpe cuando tratamos de generalizar las matemáticas a situaciones físicas concretas.

La idea la expuso con toda claridad Manfred Eigen, Premio Nobel de Química de 1967 (Mehra, 73, p. 618), al observar que: "Una teoría no tiene más que dos posibilidades: ser cierta o estar equivocada. Un modelo tiene una posibilidad más: puede ser correcto pero improcedente, no venir al caso". Y tal puede ser el caso si tratamos de duplicar y acrecentar físicamente algo por medio del teorema de Banach-Tarski.

Evidentemente, el teorema de Banach-Tarski es de extrema importancia matemática. ¿Pero es útil físicamente? No tiene necesidad de serlo. El gran matemático G. H. Hardi (1877-1947) escribió de sus propios descubrimientos matematicos (Hardy 67, pp. 150-151): "Nunca he hecho nada 'útil'. Ninguno de mis descubrimientos lo ha sido, o es probable que introduzca, directa o indirectamente, para bien o para mal, la mínima diferencia a la amenidad del mundo. He contribuido a la formación de otros matemáticos, pero matemáticos de mi misma especie, y su trabajo ha sido, en la medida en que los he ayudado, tan inútiles como el mío".

Esta autocrítica quizá deje un sabor amargo. Pero lo que está diciendo es que las matemáticas puras, por definición, no necesitan extenderse al mundo real. Algunos matemáticos irán más lejos, hasta el punto de preferir que sus obras no sean aplicadas a nada, con la convicción de que la aplicación del arte de una u otra manera empaña su belleza.

¿Merecen, pues, las matemáticas ser llamadas *Reina de las ciencias?* ¡Claro que sí! A pesar de algunos casos en que las aplicaciones físicas puedan no existir, las matemáticas han sido, históricamente, el instrumento primigenio de las ciencias sociales, biológicas y físicas. Es notable que un estudio, tan potencialmente puro, pueda ser aplicable a la vida cotidiana.

Albert Einstein pregunta (Einstein 83, p. 28): "¿Cómo puede ser que las matemáticas, siendo después de todo un producto del pensamiento humano que es independiente de la naturaleza, cuadre tan admirablemente con los objetos de la realidad?" Esta sorprendente dualidad infunde a las matemáticas tanto poder como encanto.

¿Podemos descartar, con ciento por ciento de certidumbre, la posibilidad de que algún día pueda tener aplicación física este teorema? La respuesta puede ser más asombrosa todavía.

.7.

EL MUNDO REAL

Me he topado con gente que se admira de que los gatos tengan
en la piel agujeros exactamente donde están sus ojos.
GEORG CHRISTOPH LICHTENBERG

Hace años, mis abuelos me regalaron una caña de pescar con carrete. Luego de cierto tiempo de uso el carrete estaba sucio y cubierto de escamas. Decidí desarmarlo y limpiarlo. Después de esto, traté de volver a armar lo que parecía un millar de tuercas, pernos, engranes, resortes, etc., hasta que lo logré. Sólo que me habían sobrado partes suficientes como para hacer otro carrete.

¡Fue un momento de *Banach-Tarski*!

Ahora que estoy sentado ante la computadora escribiendo este mecanuscrito, noto, contrariado, que hay pelos de perro en el teclado, en mi ropa, flotando en el café, en todas partes. ¡A nuestro perro labrador, Bailey, se le cae mucho pelo! Otro dueño de esta raza de perros me sugiere que recojamos el pelo con una aspiradora, que luego lo saquemos de la bolsa y construyamos otro labrador. ¿Necesitamos para esto el Axioma de elección? Entonces, ¿qué uso puede tener en el *mundo real* el teorema de Banach-Tarski? Como el teorema no tiene ni siquiera un siglo de vida, podríamos adoptar una actitud de "esperar y ver qué pasa". Nos recuerda el cliché "¿Para qué sirve un recién nacido?"

La naturaleza inconstruible de la descomposición de Banach-Tarski cierra toda posibilidad de duplicar barras de oro, panes, peces, etc. Pero no debemos cerrar la puerta a la posibilidad de aplicación en el mundo real de este resultado surrealista. Pudiera existir algún espacio contoneante donde la paradoja se manifieste por sí sola en los fenómenos del mundo real. *Nosotros* tal vez no seamos capaces de duplicar y amplificar

como lo permite el teorema de Banach-Tarski; pero no impongamos nuestras limitaciones a la Madre Naturaleza. ¡Quizá ella no haya decidido jugar con nuestras reglas!

Al considerar los posibles escenarios o situaciones, debemos distinguir entre la fantasía, la especulación y la realidad. Las fronteras no están siempre trazadas nítidamente.

LA FANTASÍA

Años hace que me encontré con el artículo "Fabricante de materia proporciona materia para el pensamiento" [A Matter Fabricator Provides Matter for Thought] (Dewdney 89), publicado en la columna Recreaciones de la edición de abril de 1989 del *Scientific American*. El columnista, A. K. Dewdney, escribe para la revista desde hace mucho, aparte de ser prolífico autor de libros de matemáticas y computación. El artículo, de sólo unas cuantas páginas, tal vez pasó inadvertido para muchos lectores.

Después de echarle un vistazo al título, supuse que el artículo trataría de *fabricantes digitales*, conocidos también como *fabricadores* (en la jerga computacional del inglés: *fabbers*), *replicadores*, *reproductores* o *impresores tridimensionales*. Tales dispositivos, que hicieron su aparición a fines de los años ochenta, no son lo mismo que el reproductor de ficción de la fama de Star Trek, aparato que podía crear cualquier cosa deseada con sólo oprimir un botón. Los fabricadores digitales son, de hecho, aparatos reales que *imprimen* objetos tridimensionales a partir de datos proporcionados por una computadora y materia prima. En el mismo sentido en que una impresora bidimensional inyecta tinta en un papel para producir una imagen bidimensional, la impresora tridimensional rocía capas de polvo plástico con un agente aglutinador para formar objetos tridimensionales, sólidos, que pueden representar modelos (arquitectónicos, automotrices, etc.) o dispositivos que en verdad funcionan (figura 7.1).

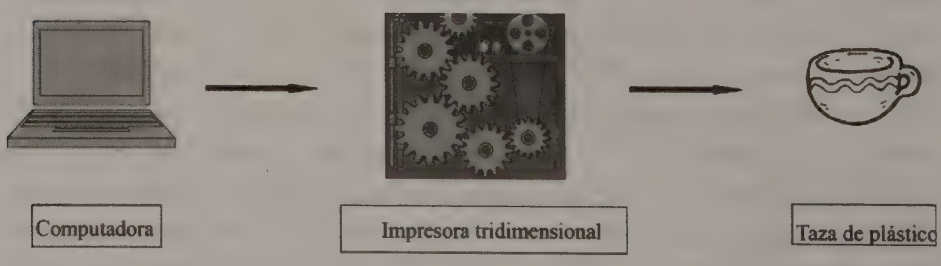


Figura 7.1. Fabricación digital.

Entre sus aplicaciones actuales están la visualización de datos científicos y la creación de material didáctico como modelos de la anatomía humana. Sony, Adidas y BMW han encontrado en la técnica de impresión tridimensional un medio barato de producir prototipos.

En su mayoría, las impresoras tridimensionales que existen hoy en el mercado son industriales y su precio es de más de cien mil dólares. Se espera que en veinte años aparezcan modelos baratos de escritorio, para uso personal. ¿Pero habrá demanda de impresoras tridimensionales personales? Sólo se pueden hacer conjeturas al respecto. Pero hay quienes vislumbran el día en que un consumidor compre "en línea" (por Internet) la descripción digital de un producto, para luego hacer que su impresora tridimensional fabrique el objeto a partir de las especificaciones digitales. En la actualidad los objetos se hacen de resina plástica; pero en el futuro las impresoras tal vez usen aleaciones para producir focos, microchips y aparatos domésticos. Acaso las casas fotocopiadoras empiecen a ofrecer servicios de impresión tridimensional.

Hojeé rápidamente las páginas de Dewdney, suponiendo que no contendría nada nuevo hasta que de momento saltaron a mi vista las palabras "Banach-Tarski". Decidí leer minuciosamente el artículo de cuatro páginas.

Dewdney escribe acerca de correspondencia reciente que sostiene con un matemático verosímil, usando el pseudónimo de Arlo Lipof. Este le comunicaba que había escrito un programa de computadora que daba las instrucciones precisas para duplicar el tamaño de esferas macizas mediante la descomposición y rearmado de Banach-Tarski. Estaba atrapado, y leí todo el artículo palabra por palabra.

Lipof había "mecanizado la demostración de la paradoja de Banach-Tarski y franqueado la naturaleza no constructiva de la construcción usando alguna clase de programa generador de números aleatorios en su computadora personal cuando hizo falta recurrir al axioma de elección. Al cabo de un experimento de siete meses Lipof consiguió duplicar el diámetro de una bola sólida, de oro, de 340 g. ¡El volumen y la masa se multiplicaron por ocho!

Dewdney escribía que había perdido contacto con Lipof, al tiempo que había notado un descenso lento pero uniforme del precio del oro en los meses anteriores a la publicación de la columna. Y agrega: "Quizá esta sea la prueba definitiva para quienes pensaban que la paradoja de Banach-Tarski no era más que un juego de matemáticos".

Dejé el artículo y traté de encontrarle sentido a lo que acababa de leer. Me hice la misma pregunta que me vino a la mente cuando supe

por primera vez del teorema, hace cuarenta años. ¿Era un chiste? No recordaba más que dos escritos jocosos en relación con el teorema: un *limerick* y un anagrama:

Hubo una vez dos matemáticos
Que fragmentaron una bola de plomo con particiones
Y con tan sólo cinco partes
Nuestros dos maestros de artes
Formaron con ellas municiones

Anagrama de Banach-Tarski:
Banach-Tarski Banach-Tarski

Ah, ¡pero qué estúpido soy! Era el *Scientific American* de abril. Anagrama de Arlo Lipof: *April fool!*[11]

ESPECULACIÓN

¿Para qué fastidiar? ¿No es la especulación sinónimo de fantasía? ¡No! No abaratemos la especulación. Como veremos en el resto de este capítulo, la especulación puede estar más cerca de la realidad de lo que creemos. Bruno Augenstein, físico y matemático, ex investigador de la Rand Corporation, escribió mucho sobre los vínculos entre la teoría de conjuntos y la física, con referencias específicas a la paradoja de Banach-Tarski. Hizo notar muchos paralelismos entre las dos disciplinas, algunos muy especulativos y demasiado numerosos como para citarlos aquí.

Una fascinante comparación, no relacionada directamente con el teorema de Banach-Tarski, es la del conjunto vacío $\varnothing$ de la teoría de conjuntos y el vacío de la física. Como parte de la exposición de la paradoja de Burali-Forti que se hizo en el capítulo 3, vimos cómo todos los números naturales se pueden construir a partir del conjunto vacío. Siendo éste el caso, podríamos seguir adelante y argumentar que la aritmética, el álgebra y en realidad las matemáticas todas se hallan erigidas sobre un fundamento singular: el conjunto vacío. En cierto sentido, todo viene de la nada –¡del vacío!–. Como sacar un conejo de un sombrero de copa (figura 7.2).

---

[11] April Fool, es decir, El tonto de abril, es más o menos equivalente a nuestro "Día de los inocentes", que celebramos el 28 de diciembre. (N. del T.)

Figura 7.2. Algo de nada.

Augenstein advierte (Augenstein 96, pp. 1771-1773) un desarrollo paralelo del mundo físico a partir del vacío, diciendo que el "vacío es un medio físico muy rico; según diversas interpretaciones es un imán, un dieléctrico, un superconductor, una fase termodinámica, y permite la emisión, propagación y absorción de relaciones temporales, con anterioridad a la aparición de materia, fuerza o estructura métrica, pero con una estructura topológica suficiente para construir una teoría cuántica; que los temas de la unificación de la física fundamental pueden necesitar para ser completados algunas nociones convenientes del vacío; y que 'materia' y 'espacio vacío' o vacío no son entidades absolutamente distintas". Luego cita cinco aspectos del vacío físico que pueden "apuntalar la física".

1. El efecto Casimir

El efecto Casimir, cuya existencia fue predicha por el físico holandés Hendrick Casimir en 1948, es una fuerza débil que existe entre dos placas paralelas (separadas entre sí unos cuantos micrómetros) empujadas una contra la otra en el vacío. La física moderna sugiere que un vacío contiene *fotones virtuales* (u ondas electromagnéticas) de todas las longitudes de onda posibles; por consiguiente, hay energía en el vacío. Empujando las placas una contra la otra se eliminan algunos fotones (u ondas) entre las placas, con lo que se produce un desequilibrio entre las placas que resulta de que la energía entre éstas se hace ligeramente menor que la existente fuera de las placas. El desequilibrio produce una

fuerza pequeña, conocida como fuerza o efecto de Casimir. La teoría del campo cuántico predice que esta *energía del vacío* es infinita, lo que sugiere que un vacío es la fuente de la llamada *energía de punto cero.*

2. El vacío físico como fuente de partículas

Como observó Augenstein, el segundo aspecto del vacío físico consiste en que es una fuente de partículas. La colisión de muy intensa energía de dos protones puede producir partículas adicionales en forma de pares protón-antiprotón. Simbólicamente, $P + P \rightarrow P + P + n(P +)$. El número de pares, n, depende de la energía de la colisión. Así, 2n partículas adicionales se crean de la energía del rayo del vacío. Más adelante en este mismo capítulo, consideraremos una explicación tipo Banach-Tarski de este proceso, aducida también por Augenstein.

3. Vista del vacío de un observador acelerado

Augenstein cita descripciones de *partículas aparentes* tal y como las ve un observador que acelera cruzando un vacío, sugiriendo de nuevo un campo de punto cero como fuente de la masa.

4. El universo inflacionario

El universo inflacionario (adjetivo éste último que nada tiene que ver con la inflación en economía), como lo describe la teoría de la explosión inicial, puede ser un ejemplo de la rica estructura del vacío físico, en el cual *todo proviene de la nada.*

5. Efectos gravitacionales

Por último, se especula que el vacío, o campo de punto cero, puede ser una fuente de gravedad. Hay un principio laxo de *todo se vale* que puede aplicarse a las ciencias físicas. Karl Svozil del Instituto de Física Teórica de la Universidad Tecnológica de Viena lo llama *Principio de Go-Go: Debe permitirse todo método y objeto mientras no esté excluido por las reglas. Lo cual significa que todo lo que no está prohibido está permitido.*

Svozil hace notar que el principio es indudablemente avanzado y tendiente a la aceptación de las ideas nuevas, aunque sea poco confiable en el sentido de que puede dar lugar a falsas afirmaciones. Sin embargo, podría resultar "esencial para producir nuevos frutos, para el descubri-

miento de la tierra no descubierta (el paraíso de Hilbert)..." [Svozil 95, p. 1546]. De cualquier modo, es inspiración primaria de las siguientes especulaciones Banach-Tarski.

COSMOLOGÍA

Los cosmólogos, los físicos, los filósofos, los teólogos y en realidad todos nosotros nos hemos preguntado "¿Dé dónde proviene todo?" La verdad llegará por medio de la fe o por una correcta extrapolación retrospectiva hasta el principio del universo. En los años cuarenta el físico ruso-norteamericano George Gamov desarrolló la teoría de la *explosión inicial (big bang)*, de que el universo comenzó con una ardiente explosión de materia y energía hace entre diez mil a quince mil millones de años. (El término *big bang* lo usó por primera vez el astrónomo británico Fred Hoyle, que se oponía a *teoría del estado estable* de "la creación". Al mismo tiempo, *big bang* se usó como descripción despectiva de la teoría de Gamov.) Si bien es la explicación del principio del universo, que goza de aceptación general, los cosmólogos siguen desconcertados ante muchas preguntas sin respuesta. ¿Qué ocurría antes de la explosión inicial? Stephen Hawking, el afamado físico teórico de Cambridge, compara la pregunta con esta otra: "¿Qué está al norte del polo norte? ¿Qué ocurrió realmente durante la propia explosión inicial? ¿Cuál es el destino de nuestro universo?"

Basado en ideas de la relatividad general, Hawking sugiere que en la gran explosión ocurrió una *singularidad inicial*. Las singularidades son resquebrajamientos del espacio y el tiempo en que las leyes de la física clásica no son aplicables.

M. S. El Naschie, ex miembro del Departamento de Matemáticas Aplicadas y Física Teórica de la Universidad de Cambridge, publicó varios artículos, exponiendo sus especulaciones sobre las conexiones que hay entre el teorema de Banach-Tarski y la singularidad espacio-temporal (cósmica) inicial, asociada con la teoría de la creación por la gran explosión. Propone (El Naschie 95) que a un "mecanismo de Banach-Tarski" se deben el vacío y la materia creados en la singularidad inicial. Indica que la expansión Banach-Tarski ocurrió entonces y sólo entonces porque las leyes usuales de la física y la geometría no existen en las singularidades, donde el concepto de volumen carece de significado real. Hace ver que "... empezando con una esfera de 'espacio-tiempo' tetradimensional, una descomposición de Banach-Tarski originaría un mecanismo de duplicación para activar y provocar una 'inflación tipo

explosión inicial (big bang)' que conduciría a la creación del propio espacio-tiempo". De ideas afines a las de Augenstein sobre la naturaleza del vacío, El Naschie considera el vacío como "algo insustancial", en comparación con la "nada", a la que ve como "nada insustancial". El vacío debe considerarse "una entidad rica y compleja que sirva de punto de partida de la física teórica".

En última instancia nuestro universo puede experimentar, según El Naschie, el proceso inverso durante el cual se derrumbe sobre sí mismo hasta convertirse en la singularidad de un agujero negro.

Refiriéndose a ésta como "gran implosión", El Naschie prevé el colapso como una compresión de Banach-Tarski (figura 7.3). El Naschie aclara y subraya que no está sugiriendo que en realidad esto fue lo que sucedió. ¿Entonces qué es lo que nos dice? Escribe que no podemos pasar por alto la posibilidad de que esto o algo por el estilo pudiera haber ocurrido. Así es como el principio de "todo se vale" mantiene abiertas las opciones.

Figura 7.3. La cosmología de El Naschie.

EL CAOS

Una gran gota de melcocha se sujeta a los rodillos de la máquina de hacer chiclosos. Al girar los rodillos, la melcocha es estirada y doblada rítmicamente, como al amasar. Las rayas de colores de la melcocha se dispersan al azar y terminan por llenar el volumen entero del chicloso. El fenómeno se parece a lo que vemos cuando agregamos una cucharadita de crema blanca a una taza de café negro. El revolver rítmico propaga la crema blanca por todo el café en un caos de aspecto aleatorio. La aleatoriedad aparente y el comportamiento impredecible del color en el chicloso y la crema en el café son ejemplos de *dinámica no lineal*, ciencia a la que popularmente se llama *teoría del caos*. Existen aplicaciones de ella en meteorología, fisiología, hidrodinámica, finanzas, sociología y ciencias políticas. Tracemos primero la distinción entre sistemas dinámicos clásicos y sistemas dinámicos caóticos; luego expondremos las aplicaciones de Banach-Tarski a la teoría del caos al tenor de los escritos de M. S. El Naschie y Karl Svozil.

Un sistema dinámico, clásico o caótico, se puede describir íntegramente en términos del *espacio de fase* asociado, espacio hipotético de dimensión igual al número de variables necesarias para especificar el sistema en un momento dado. Como ejemplo, consideremos el movimiento de un péndulo sin fricción, que no pierde energía al oscilar de un lado a otro (figura 7.4).

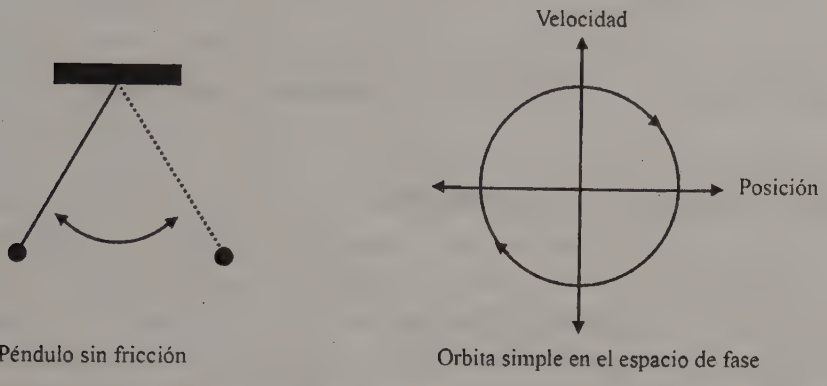


Figura 7.4. El movimiento de un péndulo sin fricción.

En cualquier punto del tiempo, el estado del sistema está especificado completamente por su posición y velocidad, un punto en un espacio de fase. Con el paso del tiempo, el punto traza una órbita en el espacio de fase, que representa la evolución cronológica del sistema. Una de tales órbitas es la representada por el círculo de la derecha. Si el péndulo descrito arriba fuese disipativo (que perdiera energía por fricción), entonces la órbita sería espiral con un punto interior, como se ve en la figura 7.5.

En general, el estado de una partícula en el espacio tridimensional se puede especificar mediante seis variables –tres de las coordenadas x, y y z de su posición y tres de los componentes x, y y z de su velocidad–. Consecuentemente, un sistema dinámico que implique n partículas que se muevan en el espacio tridimensional requerirá de un espacio de fase hexadimensional.

En el caso del péndulo disipativo, el sistema termina por alcanzar el reposo. Para cualquier condición inicial la órbita sería atraída hacia el punto fijo del espacio de fase que corresponde al origen. *Grosso modo*, un subconjunto del espacio de fase al cual son atraídas las órbitas se llama *atractor*. Ninguna órbita puede emanar de un atractor.

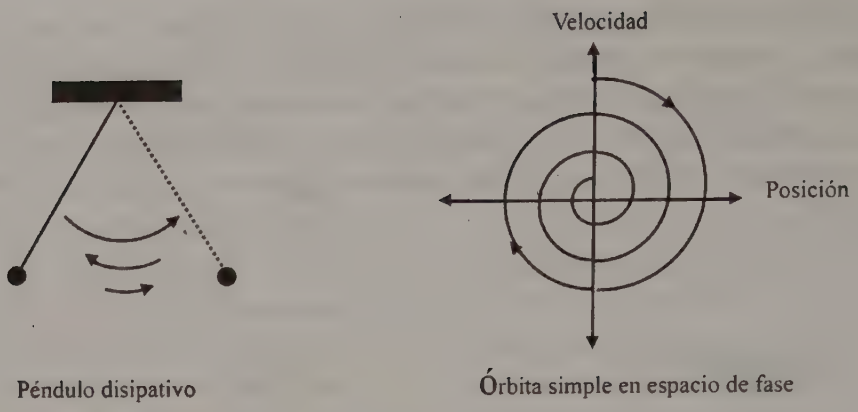


Figura 7.5. El movimiento de un péndulo disipativo.

Los atractores clásicos son de tres tipos:

1. *Atractores de un solo punto* como el mostrado por el péndulo disipativo.
2. *Atractores de ciclo límite* (rizos repetitivos) como el mostrado por el péndulo sin fricción.
3. *Atractores toroidales (con superficie de dona)* que implican dos o más oscilaciones independientes. Las órbitas se enrollan en la superficie del toro (atractor). A estos atractores se les llama *quasiperiódicos*, porque las órbitas no se repiten a sí mismas exactamente si las frecuencias de las oscilaciones independientes no tienen un divisor común.

Para todos los sistemas dinámicos, la órbitas que empiezan casi juntas permanecen juntas, se conservan así, permitiendo la predictibilidad a largo plazo del sistema. Esto es, aun cuando no podamos medir la posición y la velocidad de una partícula con 100% de exactitud, una aproximación cercana nos permitirá predecir un estado futuro con precisión razonable.

En 1963, mientras hacía modelos matemáticos de la atmósfera de la Tierra, el meteorólogo Edward N. Lorenz, del Instituto Tecnológico de Massachusetts, descubrió otro tipo de atractor: el *atractor caótico* o *extraño*. En los sistemas dinámicos caóticos el espacio de fase se mezcla como el chicloso. El estiramiento y el doblamiento repetidos producen un atractor que es como fractal en el sentido de que cualquier poten-

cia de amplificación revela una estructura idéntica al atractor entero (figura 7.6). Las secciones transversales de los atractores extraños son Conjuntos de Cantor, como los descritos en el capítulo 4. Son imposibles las predicciones a largo plazo debido a la sensible dependencia de las condiciones iniciales y la inexactitud inevitable en la medición de las variables asociadas con el estado del sistema. Las órbitas divergirán y llenarán el atractor del mismo modo que las vetas de color del caramelo o las gotas de crema en el café terminarán por llenar sus espacios respectivos. Las incertidumbres iniciales pequeñas se irán amplificando con el tiempo y, en efecto, no habrá conexión entre el presente y el futuro. ¡Caos!

En resumen, los sistemas dinámicos clásicos permiten la predictibilidad porque las órbitas que empiezan juntas permanecen juntas. Un pequeño error de medición cuando mucho provocará un pequeño error en la predicción del estado futuro del sistema. Por el contrario, los sistemas dinámicos caóticos son desmesuradamente sensibles a las condiciones iniciales. Por tanto, un pequeño error de medición puede provocar un gran error en la predicción de un estado futuro. Este acrecentamiento asociado a los sistemas caóticos recibe el nombre de *efecto mariposa*. Según Lorenz (Lorenz 93, p. 14), el origen de la expresión puede estar en el artículo, de este mismo investigador, intitulado "¿Desencadena un tornado en Texas el aleteo de una mariposa en Brasil?" ["Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?"].

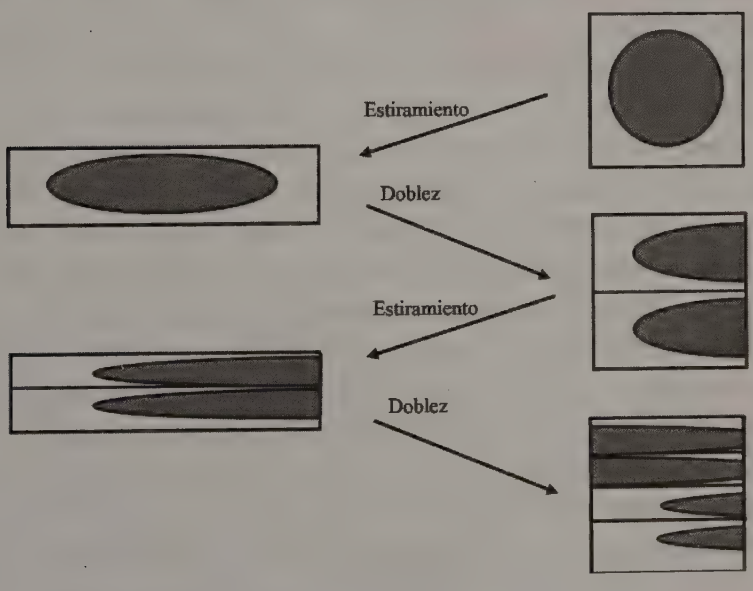


Figura 7.6. Estirando y doblando se produce un atractor extraño.

Tanto El Naschie como Svozil especulan sobre las fuentes del comportamiento caótico en términos de procesos de Banach-Tarski. El Naschie escribe (El Naschie 95b, p. 1507): "La posibilidad de que pudieran producirse dos esferas comenzando con una sola tal y como lo dicta el teorema de BT y que pudieran tener volúmenes arbitrarios implica ahora la posibilidad de aleatoriedad espacial o caos que invade el universo. Si esta conjetura es correcta entonces quizá ésta sea la fuente original de toda la aleatoriedad y caos del mundo y sea 'más' fundamental que todas las demás 'rutas hacia el caos determinista' tratadas hasta ahora en la literatura de la cosmología".

Svozil nota (Svozil 93, p. 222; 95, pp. 1550-1553; 96, pp. 789-791) dos comparaciones entre los procesos de Banach-Tarski y los atractores caóticos. En los sistemas clásicos, no disipativos, en la evolución del tiempo la distancia se conserva (isometría). La distancia entre dos puntos escogidos del espacio de fases permanece constante a medida que los puntos recorren sus órbitas respectivas. Por ejemplo, la distancia entre cualesquiera dos puntos escogidos del espacio de fases circular del péndulo sin fricción permanece constante mientras los puntos se mueven en torno del círculo. En consecuencia, los volúmenes del espacio de fases se mantienen constantes sin posibilidad visible de comportamiento caótico. Los subconjuntos de atractores caóticos se esparcen en el tiempo hasta llenar el atractor. Svozil propone otra definición de atractor extraño: la de atractor capaz de amplificación de Banach-Tarski por evolución en el tiempo. Los atractores extraños se transforman para llenar el atractor de modo semejante a como se reorganizan los subconjuntos de una esfera para formar otra esfera de volumen mayor.

Svozil sugiere la posibilidad de que exista un *caos lineal*, sosteniendo que puede haber rutas al caos que partan de sistemas dinámicos lineales y no caóticos. El teorema de Banach-Tarski muestra que existen transformaciones isométricas (evoluciones temporales) que pueden duplicar el volumen de cualquier subconjunto de espacio de fases. En consecuencia, el atractor de un sistema no caótico se puede descomponer y recomponer por medio de evoluciones temporales escogidas cuidadosamente para formar un atractor de volumen mayor. Svozil le llama a esta posibilidad *caos lineal*. Svozil admite que cada transformación requerida corresponde a una evolución temporal diferente. Cree, sin embargo, que puede haber una "ruta al caos" como consecuencia de la amplificación del volumen.

FÍSICA DE PARTÍCULAS

Antes todo era sencillo. Mi proyecto de ciencia en séptimo grado fue un átomo de oxígeno. Lo construí con 24 pelotas de ping pong: ocho protones pintados de azul, ocho neutrones pintados de blanco y ocho electrones pintados de anaranjado. Los protones y los neutrones iban pegados unos a otros, formando el núcleo del átomo, y los electrones estaban sujetos por alambres como recorriendo sus órbitas en torno del núcleo. Lo que yo sabía entonces es que estas bolas de ping pong representaban los ladrillos fundamentales de la materia.

Hoy, el *Modelo estándar* de la física de partículas, formulado en los años setenta y confirmado en los ochenta, contiene cientos de partículas fundamentales con características tales como *masa*, *carga*, *sabor* y *color*. ¡Ya no es la física de mi clase de ciencia de séptimo grado!

En el Modelo estándar de hoy, la partícula fundamental, primaria, de la materia es el *quark*, de seis sabores distintos –arriba, abajo, encanto, extraño, cima y fondo–, cada uno de ellos con su propia masa y carga eléctrica. Los quarks unidos por el llamado campo de *fuerza fuerte* forman *hadrones*, entre los cuales están los *neutrones* (un quark arriba-dos quarks abajo), los *protones* (dos quarks arriba-un quark abajo) toda una variedad de *mesones* (un quark-un antiquark). Los quarks parecen ser verdaderamente fundamentales y no tienen subestructura. Los *leptones*, que abarcan los electrones, los muónes y el neutrino, son también fundamentales y sin subestructura. Podemos decir entonces que los quarks y los leptones, incluidas sus correspondientes antipartículas, deben considerarse los ladrillos fundamentales de la materia.

Roger S. Jones, profesor emérito de física de la Universidad de Minnesota, y Bruno Augenstein emplean el teorema de Banach-Tarski como explicación de varios fenómenos cuánticos. Jones describe lo que llama "rompecabezas electrón-muón" en términos de la amplificación de Banach-Tarski. Los electrones y los muónes, ambos miembros de la familia de partículas elementales de los leptones, se parecen de todo punto salvo en cuanto a masa y estabilidad. El muón, *parecido al electrón* e inmune a las interacciones fuertes, tiene una masa 200 veces mayor que la del electrón y no es estable; su vida dura alrededor de un millonésimo de segundo. Aparte de sus masas y estabilidad, ambas partículas son idénticas. El muón puede estar cargado positiva o negativamente, lo que también es cierto del electrón y su antipartícula de carga positiva: el positrón. Al muón cargado negativamente se le puede llamar con toda corrección *electrón pesado*.

Según Jones, el muón es único como partícula elemental en que no tiene más características distintivas que la ser un "electrón gordo y vida efímera". Otras partículas elementales sirven para un propósito singular, cada una de ellas con una función específica. Jones pone en duda la existencia del muón, sugiriendo que puede haber evolucionado a partir del electrón por amplificación de Banach-Tarski. Escribe (Jones 82, p. 227) que "... un chícharo puede dividirse en partes, como un rompecabezas tridimensional y armarse de nuevo ¡para formar el Sol! Y un electrón se puede transformar en un muón en un número finito de pasos...". Jones admite al instante la naturaleza especulativa de su propuesta, calificando la especulación de "alimento para el pensamiento".

El teorema de Banach-Tarski permite la duplicación de la esfera maciza mediante una descomposición en partes finita; el teorema en sí no especifica el número de piezas que hacen falta. En 1947, R. M. Robinson (Robinson 47) demostró que la duplicación de Banach-Tarski puede lograrse con sólo cinco piezas, y cinco es el número mínimo de piezas necesarias para la duplicación. En su división en partes, Robinson usa dos de las cinco piezas para formar una copia y las otras tres para la segunda copia. Desde luego, *el proceso puede repetirse por descomposición de la copia de dos piezas y la de tres piezas en copias de copias de dos y tres piezas, y así sucesivamente.*

Augenstein usa el teorema de Banach-Tarski y el resultado de Robinson para explicar varias reacciones hadrónicas de la física de partículas (Augenstein 96, pp. 1791-1792). Los hadrones están asociados con las esferas sólidas del teorema de Banach-Tarski; los quarks son las piezas de las descomposiciones. A continuación, tres ejemplos.

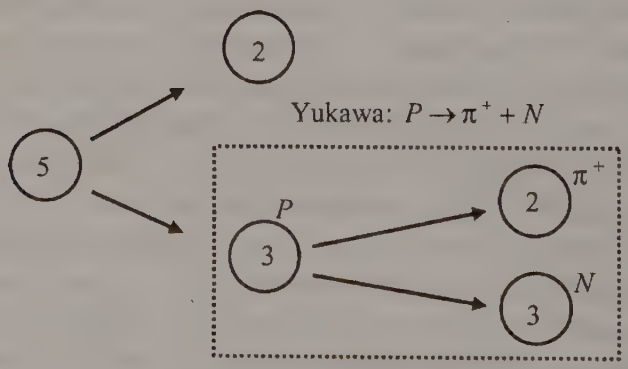


Figura 7.7. Interpretación BT de una reacción de Yukawa.

Augenstein traza la comparación entre la descomposición de Robinson y una *reacción de Yukawa*, en que un protón (tres quarks) se transforma en un mesón pi de carga positiva (dos quarks) y un neutrón (tres quarks). De la descomposición de Banach-Tarski de Robinson resulta un modelo matemático preciso de esta reacción (Figura 7.7). ¿Es esto una coincidencia o es la duplicación de Banach-Tarski de la fuente de los *dos hadrones a partir de uno* de la reacción de Yukawa?

El segundo ejemplo de Augenstein, ya citado en este capítulo, es la colisión de dos protones que crean uno o más pares protón-antiprotón: P + P → P + n(P - P), donde el número de pares, n, depende de la energía de la colisión. Con n = 1, la parte esencial de la reacción es P + P → P + . Cuando se le citó antes, la interpretación que se dio fue que el par protón-antiprotón se creaba del vacío físico. Augenstein da otra interpretación empleando un resultado de Jan Mycielski (Mycielski 55), de que una esfera maciza se puede cortar en 2 + 3(l-1) piezas y rearmarse para formar una copia de dos piezas y l-1 copias de tres piezas. Usando l = 4, el resultado de Mycielski permite la descomposición de una esfera sólida en 11 piezas para formar una copia de dos piezas y tres copias de tres piezas (figura 7.8). Como siempre, el proceso puede repetirse en cualquiera de las esferas recién creadas.

Repitiendo el proceso (usando l = 4), de una de las copias de tres piezas podemos formar una copia de dos piezas y tres copias de tres piezas. Para tal fin, asociamos la reacción de un protón (tres quarks) que se convierte en un mesón pi neutral (dos quarks), dos protones (de tres quarks cada uno) y un antiprotón (tres quarks). Simbólicamente $P \rightarrow \pi^{\circ} + P + P + P$. La naturaleza simétrica del resultado de Robinson permite que una partícula de dos piezas (π°) se combine con una partícula de tres piezas (P), produciendo una partícula de tres piezas (P). Escribimos $\pi^{\circ} + P \rightarrow P$. Poniendo todo junto, tenemos $P \rightarrow P + P + P$, el resultado deseado.

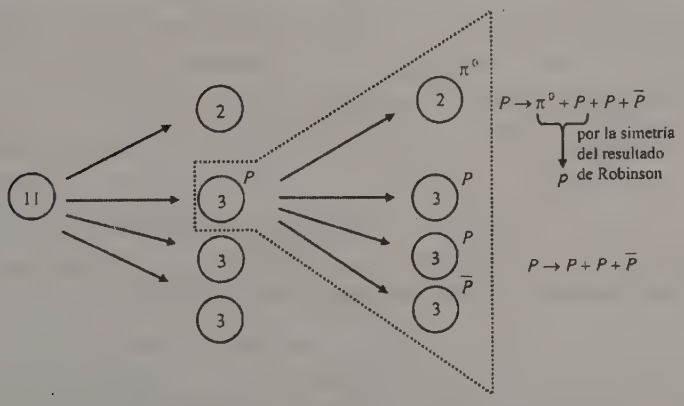


Figura 7.8. Interpretación BT de la producción del par protón-antiprotón.

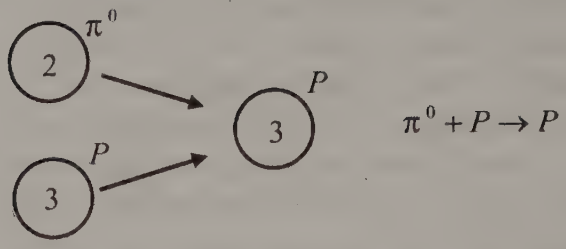


Figura 7.9. Esfera sola de Robinson a partir de dos esferas.

Nuestro último ejemplo de cómo el teorema de Banach-Tarski puede gobernar el comportamiento del hadrón implica el comportamiento de transposición de las reacciones hadrónicas. Cualquier reacción general es equivalente a una obtenida por transposición de una partícula en el lado opuesto de la reacción y reemplazándola con su antipartícula. Por ejemplo A+B → C+D puede escribirse como A+B+C → D. El teorema de Banach-Tarski junto con los resultados de Robinson y Mycielski son compatibles con esto. Por ejemplo, el resultado de Robinson permite (por simetría) la figura 7.10.

Así, pues, la descomposición de Banach-Tarski es compatible con la transposición partícula-antipartícula, como se evidencia en las reacciones $\pi^\circ + P \to P$ y $\pi^\circ \to P + P$.

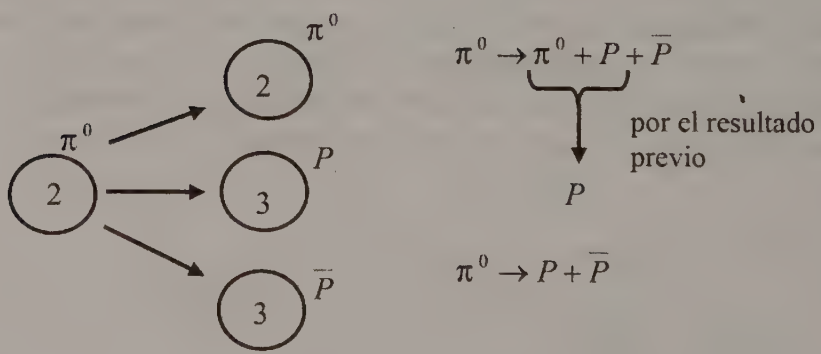


Figura 7.10. BT y las transposición de partícula-antipartícula son compatibles.

En resumen, Augenstein advierte que (Augenstein 84, p. 1204) "la forma en que en última instancia debe verse la significación de estas analogías

no está clara; o es que acaso sugieren aspectos insospechados de la realidad física". Él cree que vale la pena tomar nota de todas las coincidencias pues éstas pueden conducir hacia algo significativo. Piensa que la paradoja de Banach-Tarski es tanto necesaria como suficiente para explicar el comportamiento de los hadrones. Repara en que en todo caso tales especulaciones pueden desecharse si las conexiones no son, en efecto, más que coincidencias. Escribe Augenenstein (Augenstein 94, p. 26) "...Yo creo que profundizar en el estudio de los Teoremas de Banach Tarski (TBB) y de las reacciones a sus resultados pueden obtenerse ideas nuevas que interesen a otros públicos. Los TBB poseen claramente la potencia para describir partes de la física. Hay razón además para especular que los TBB pueden esclarecer otras interrogantes sobre el proceso del conocimiento y el aprendizaje –cómo adquirimos nuestros conceptos del espacio físico, cómo amoldamos y modificamos nuestras creencias, qué tan afines son las nociones de "plausible", "contraintuitivo".

LA REALIDAD

En este capítulo hemos fantaseado y especulado. ¿Cuál es el camino a la realidad? Corriendo el riesgo de sonar *Clintonesco*, esto puede depender de nuestra definición de realidad. Aquí presentamos el argumento de que la realidad, tal y como la conocemos, es especulativa. ¿En qué caso las especulaciones expuestas son todas ellas *reales?* En caso de que no violen el Principio Go-Go de Svozil. No tenemos justificación para rechazarlas.

Piénsese en ello. Albert Einstein dijo "La realidad es meramente una ilusión, aunque muy persistente". Lily Tomlin, que representa el personaje de Trudy en la obra de Broadway de Jane Wagner *La búsqueda de signos de vida inteligente en el Universo*, se enfrenta a la realidad diciendo (Wagner 86, p. 18): "Me niego a que la realidad siga intimidándome. Después de todo, ¿qué es la realidad? Nada más que una intuición colectiva".

¿Pudiera ser que cualquier modelo del mundo físico no sea otra cosa que una manera de ver las cosas –una metáfora? El escritor y conferencista Dr. Wayne Dyer afirma que *Cuando cambias la manera de ver las cosas, ¡las cosas que ves cambian!*

Las siguientes palabras de John Gribbin, con las que describe la realidad potencial de las varias interpretaciones de la mecánica cuántica, se aplican aquí también (Gribbin 95, p. 245). "Insisto, una vez más, en que

todas las interpretaciones son mitos, muletas que nos ayudan a imaginar lo que está pasando en el nivel cuántico y a efectuar predicciones comprobables. No son, algunas de ellas, únicamente la verdad; más bien, *todas* ellas son 'reales', aun cuando discrepen entre sí".

En otras palabras, puede ser que no haya *realidad real*. Nuestra realidad surge de la especulación; de hecho, nuestra realidad, cuando mucho, ¡es especulación! Augenstein y otros sugieren que la física evoluciona de un contexto matemático y cultural. Augenstein llega al extremo de sugerir que los físicos son capaces de encontrar equivalentes del mundo real en cualquier teoría matemática y recomienda que se busquen activamente esos modelos. Gribbin le llama a esto el *poder profético de las matemáticas*.

Andrew Pickering, ex miembro de la Universidad de Edinburgo, fomenta una filosofía similar en su libro *Constructing Quarks –A Sociological History of Particle Physics* [La construcción de los quarks: historia sociológica de la física de partículas]. Señala (Pickering 84, p. 8) que los científicos "hacen su propia historia" del medio sociológico y cultural, en contraste con el punto de vista común de que los científicos son "portavoces pasivos de la naturaleza", que observan, registran e informan. Reconoce que los resultados experimentales son la clave de cualquier teoría de la física pero apunta que tales resultados no fuerzan a los científicos a hablar. Los experimentos se realizan en un contexto donde se hacen juicios, y debe considerarse el error experimental.

Roger Jones, en su libro, *Physics as Metaphor* [La física como metáfora] (Jones 82) describe la física como un proceso creativo, que va contra el punto de vista común de que la medición objetiva determina la naturaleza del mundo real. Las "metáforas cardinales" de espacio, tiempo, materia y número las ve Jones como creaciones de la mente. Está a favor de que los científicos desempeñen un papel creador.

Las filosofías de El Naschie, Augenstein, Svozil, Gibbin, Pickering y Jones destacan que los modelos de Banach-Tarski de la realidad física no son menos plausibles que los modelos que hoy se aceptan. Pero para llegar a tales realidades, debemos proceder, creativamente, con la filosofía Go-Go de investigación y confiar en el poder profético de las matemáticas.

Bertrand Russell reconoció la importancia del poder de las matemáticas diciendo que (Barrow 88, p. 279) "la física es matemática no porque sabemos mucho del mundo físico, sino... tan poco. Lo que descubrimos son tan sólo sus propiedades matemáticas".

Martin Gardner va un poco más allá (Gardner y Fennel 94, p. 9):

> Las matemáticas no sólo son reales, sino que son la única realidad. Obviamente la totalidad del universo está constituida de materia. Y la materia se compone de partículas. Está hecha de electrones y neutrones y protones. Por tanto, el universo entero está hecho de partículas. Ahora bien, ¿de qué están hechas las partículas? No están hechas de nada. Lo único que puede decirse de la realidad de un electrón es citar sus propiedades matemáticas. Existe la sensación de que la materia se desvanece completamente, y lo que queda es una pura estructura matemática.

Dejémoslo claro. No hay bisturíes lo suficientemente afilados para realizar las disecciones de que requieren los fenómenos de Banach-Tarski. Dado el hecho de que se necesitan detalles infinitamente pequeños, sin ningún medio (matemático o físico) de construir las piezas, podemos descartar con seguridad la esperanza de ejecutar las duplicaciones y amplificaciones mismas. Ni usted, ni yo, ni Arlo Lipof lo lograremos. Pero la duplicación y la amplificación de Banach-Tarski pueden ocurrir naturalmente, *si decidimos creerlo así*. Para aceptar tales fenómenos, debemos aceptar el Axioma de elección, adoptar la permisiva filosofía Go-Go con respecto a la física y estar dispuestos a definir la realidad física de tal modo que se ejecuten los procesos de Banach-Tarski. Esto no es ciencia ficción; es sólo una manera de infundirle sentido al mundo físico.

.8.

AYER, HOY Y MAÑANA

La predicción es muy difícil, especialmente sobre el futuro.
NIELS BOHR (1885-1962)

(Yogi Berra expresó pensamientos semejantes.)[12]

La historia concluye con un principio. Las narraciones matemáticas no tienen desenlaces satisfactorios: sólo nuevos principios. En este sentido las matemáticas se distinguen de las ciencias naturales y físicas, en que las teorías y los modelos de la época son sustituidas con nuevas teorías y modelos. Por lo contrario, los teoremas matemáticos raras veces se vuelven obsoletos, pues la verdad matemática es eterna. Cada nuevo teorema o solución señala el principio de nuevas conjeturas, investigaciones, teoremas por demostrar y problemas que resolver. El teorema de Banach-Tarski seguirá siendo cierto y sirviendo de fuente potencial de matemáticas y modelos del mundo físico. A pesar de la paradoja, su verdad perdurará. Así como el punto de una oración señala el principio de una oración nueva, así también espero que la conclusión a que el lector llegue sobre este libro marque el comienzo de una investigación por parte suya de más misterios matemáticos.

Para especular sobre lo que nos aguarda, miramos hacia atrás y resumimos los pasados dos siglos de actividad matemática. Su conjetura acerca de las matemáticas del siglo XXI será tan buena como la mía. Ofrezco mis pensamientos al final de este capítulo.

---

[12] Por ejemplo: "Si la gente no quiere entrar al parque de béisbol, ¿cómo se lo vamos a impedir?"

AYER

La edad de la mayoría de las ciencias naturales, y con ellas la de la física, puede medirse en cientos de años, pero el desarrollo matemático requiere de miles de años para reseñarlo. En su mayoría sus anales empiezan con los egipcios (3000 a. C.), seguidos por los babilonios (1000 a. C.) y la antigua Grecia (500 a. C.). Y, a salvo de la obsolescencia, el cuerpo de conocimiento crece y evoluciona cerrando la posibilidad de que un individuo dado se halle en el frente mismo de todos los descubrimientos de hoy. Los matemáticos esculpen su nicho y se especializan. De las escuelas de enseñanza media contemporáneas egresan alumnos con sólidos conocimientos de matemáticas (álgebra, geometría, trigonometría) y aun así se hallan unos ¡400 años detrás de la vanguardia de las matemáticas actuales!

Las matemáticas del siglo XIX lograron avances en el cálculo (diferencial e integral), precipitando el desarrollo de la física matemática, la teoría de la relatividad, la mecánica cuántica y la naturaleza de la materia. La teoría de Cantor de los conjuntos infinitos que apareció a fines del siglo XIX y se prolongó al XX inauguró un nuevo paraíso de la investigación matemática.

La gran mayoría estaría de acuerdo en que las matemáticas del siglo XX fueron activadas con el reto lanzado por David Hilbert al mundo matemático en la forma de su famosa lista de los 23 problemas no resueltos, presentada en el Congreso Internacional de Matemáticos, de París. El espíritu del desafío fue de que no podía haber *ignorabimus*.[13] Las palabras de Hilbert: "Debemos saber. Sabremos" están inscritas en la lápida de su tumba, sita en Gotinga. Los teoremas de incompletitud de Gödel, sobre las proposiciones indecidibles y los sistemas incompletos cierran la exhortación de Hilbert, pero al mismo tiempo abren nuevas perspectivas. Las *Metamatemáticas*, forma de mirar las proposiciones aritméticas desde el exterior en vez del interior, nacen como nuevo componente de la lógica matemática. Las teorías de conjuntos no cantorianas se desarrollan sin indecidibles como el Axioma de elección y la Hipótesis del continuo. De ahí que los "no" (como en '*no* cantorianas') y los "in" (como en '*in*decidible') de las matemáticas no sean tan limitantes como parecen.

---

[13] Por la determinación con que la expresa, vale la pena incluir la cita completa: "No debemos creer a esos que hoy [...] profetizan la caída de la cultura y aceptan el *ignorabimus* [el aforismo completo es *ignoramus et ignorabimus*, es decir, no sabemos y no sabremos]. Para nosotros no hay *ignorabimus*... ¡Debemos saber! ¡Sabremos! [T.]

Las matemáticas del siglo XX vieron crecer la abstracción y abrirse paso en el análisis, la geometría y el álgebra. La topología, nacida de la geometría y el análisis, creció hasta dominar la investigación matemática. La probabilidad y la estadística, íntimamente relacionadas con la teoría de conjuntos, las funciones medibles y las teorías de la integración, avanzaron en respuesta al sexto reto de la lista de Hilbert que urgía la axiomatización de la teoría de probabilidades.

HOY

Se acepta en general que Carl Friedrich Gauss y Henri Poincaré fueron los últimos matemáticos universalistas. Hace un siglo era concebible que un matemático talentoso dominara la mayor parte de las matemáticas de su tiempo. Desde entonces, el número de matemáticos ha aumentado varios cientos de veces. Hoy, con miles de revistas publicadas en más de 100 idiomas, el volumen del conocimiento es abrumador. Las estimaciones de que se demuestran 200 000 teoremas nuevos anualmente, como lo notaron Casti (96, p. x) y Davis y Hersh (81, p. 21) equivalen aproximadamente a ¡600 teoremas al día!

El 24 de mayo de 2000, en el Collège de France, de París, el Instituto de Matemáticas Clay de Cambridge, Massachussets (CMI, siglas en inglés) arrojó el guante a los matemáticos de hoy al presentarles los siete "Problemas dignos de Premio del Milenio". Fue 100 años después de que Hilbert retó a los matemáticos del siglo XX. El objetivo del CMI fue hacer públicos los grandes problemas no resueltos, y no necesariamente imponerle un rumbo al futuro de las matemáticas, como fue el caso del reto de Hilbert. En el espíritu de celebración del nuevo milenio, se especificó un premio de siete millones de dólares para que el CMI considerara cuáles eran los siete problemas matemáticos más importantes y que se habían resistido a ser solucionados. Se publicaron las reglas para dar el premio de un millón de dólares por la solución de cualquiera de los siete problemas. Véase en las siguientes breves descripciones de los siete problemas una instantánea de la frontera que se levanta ante el descubrimiento matemático. Con cada solución vendrán nuevos comienzos.

La hipótesis de Riemann

Propuesto por Bernhard Riemann en 1859 y enumerado por Hilbert en 1900 en su lista de 23 problemas, éste puede ser el problema número uno no resuelto de las matemáticas de hoy. Riemann observó que la

distribución de los números primos está relacionada con la *Función zeta de Riemann:*

$$\xi(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\ldots$$

La hipótesis es que ciertas soluciones de $\xi(z) = 0$ satisfacen también $\mathrm{Re}(z) = ½$, o sea, la parte real de estas soluciones es igual a 1/2. Si es verdadera, la afirmación esclarecería la distribución de los números primos con aplicaciones posibles a la física y a la tecnología de las comunicaciones modernas.

Teoría de Yang-Mills y la hipótesis de la brecha de masa

Hace cincuenta años los físicos Chen-Nin Yang y Robert Mills desarrollaron una teoría nueva que describía las partículas elementales y las interacciones fuertes de estas partículas. La teoría cuántica de Yang-Mills ahora se acepta bien experimentalmente y ha sido confirmada por simulación por computadora. Sin embargo, el tratamiento matemático sigue incompleto. Este reto del milenio convoca a los matemáticos a completar los fundamentos matemáticos de la teoría. Específicamente, una propiedad de la mecánica cuántica, llamada *brecha de masa,* se refiere a algunas partículas cuánticas que tienen masas positivas, a pesar del hecho de que sus ondas asociadas viajan a la velocidad de la luz. La hipótesis de la brecha de masa se refiere a la solución de las llamadas *ecuaciones de Yang-Mills* y ayuda a explicar por qué los electrones tienen masa.

El problema P en contraste con NP

El único de los siete problemas que trata con computadoras, *el problema de P en contraste con NP* es sobre la eficiencia en solucionar problemas. Los científicos de la computación caracterizan las tareas respectivas en tipos P, E o NP. Las computaciones de tipo P (tiempo polinómico) pueden hacerse en tiempos relativamente breves. Las de tipo E (tiempo exponencial) pueden exigir millones de años. Los problemas de tipo NP (de tiempo polinómico no determinista) pueden considerarse intermedios –en que las respuestas pueden comprobarse rápidamente, pero el proceso de alcanzarlas de modo determinista podría tomar un número astronómico de años–. Tales problemas serían en realidad imposibles de resolver.

¿Son los problemas P verdaderamente distintos de los problemas NP? ¿Existen problemas NP que no se puedan resolver en tiempo polinómico, como no sea por azar y conjeturas afortunadas? La interrogante ha permanecido sin respuesta durante más de 30 años. Su solución produciría aplicaciones en el comercio y en las comunicaciones electrónicas.

Las ecuaciones de Navier Stokes

Las *ecuaciones de Navier Stokes*, producidas en el siglo XIX, describen el movimiento turbulento de los fluidos. El reto está en encontrar una solución a estas ecuaciones en la forma de alguna fórmula general, si es que existe tal solución. Los ingenieros son capaces de dar soluciones aproximadas a casos específicos pero una solución precisa completaría las matemáticas de las cuales resultarían aplicaciones al estudio de la turbulencia.

La conjetura de Poincaré

Henri Poincaré planteó esta pregunta hace un siglo. Una descripción elemental de su conjetura se obtiene comparando la superficie de una manzana con la superficie de una dona (toro). Imagínese una banda de hule (liga), estirada en torno de una manzana. Teóricamente, la liga puede reducirse hasta un punto sobre la superficie de la manzana haciéndola resbalar de modo continuo sobre la superficie de la fruta hasta que se haya reducido a un punto. Por otro lado, si una liga como la descrita se estirara alrededor de una dona (toro), no podría reducirse hasta un punto sin cortar la liga o la dona. La superficie de la manzana es *simplemente conexa*, la superficie del toro no. Poincaré preguntó si una distinción semejante podría hacerse extensiva a superficies del espacio tetradimensional.[14]

La conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer

Hay un número infinito de tríadas ordenadas de números enteros (x, y, z) que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$. Euclides encontró una fórmula

---

[14] En 2002 y 2003, un solitario matemático ruso llamado Grigory Perelman colgó en línea tres trabajos que algunos creen que resuelve la conjetura de Poincaré. A la fecha, el trabajo de Perelman aún está siendo revisado. En 2006 fue premiado con la Fields Medal por su trabajo en el problema pero él la rechazó.

para obtener todas las soluciones. En 1994 Andrew Wiles demostró el Último Teorema de Fermat, mostrando que para $n \geq 3$ no había soluciones en números enteros para $x^n + y^n = z^n$, aparte de las soluciones triviales con ceros y unos. Para casos más complicados no hay manera de determinar cuándo tales ecuaciones tienen soluciones en números enteros. En casos especiales la *Conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer* da alguna información. La conjetura se relaciona con la hipótesis de Riemann. Resolver este problema contribuiría a que entendiéramos mejor los números primos y su distribución.

La conjetura de Hodge

La cuestión general asociada con la Conjetura de Hodge es la pregunta de hasta qué punto se pueden configurar formas complicadas a partir de otras simples de dimensión creciente. El progreso sobre esta cuestión ayuda a los matemáticos a categorizar toda una variedad de objetos. En la conjetura de Hodge se afirma que para una categoría en particular llamada *variedades algebraicas proyectivas* las piezas llamadas *ciclos de Hodge* son combinaciones de piezas geométricas llamadas *ciclos algebraicos*.

Tales son los problemas del nuevo milenio. ¡Resuelva alguno y hágase millonario! Claro está que hay un proceso de revisión para las soluciones remitidas, incluida la publicación de la solución en una revista de matemáticas de prestigio mundial y un período de dos años de aceptación general. La información específica sobre los problemas y precios pueden encontrarse en www.claymath.org, sitio del CMI en Internet.

El teorema de Banach-Tarski no es un tema de frontera en las matemáticas de hoy. Sin embargo, los argumentos al estilo de Banach-Tarski aparecen en varias áreas de las matemáticas y varios problemas pendientes tal vez requieren de razonamientos de Banach-Tarski para ser solucionados. En 1991, Randal Doughrty y Mattew Foreman publicaron varios resultados de interés. Su resultado principal fue que la paradoja de Banach-Tarski podría representarse usando piezas con la *propiedad de Baire* (Dougherty y Foreman 94). La naturaleza precisa de esta propiedad es demasiado esotérica como para tratarla aquí. Con todo, en un resultado relacionado fueron capaces de demostrar una versión de la paradoja de Banach-Tarski que, vaya sorpresa, ¡no necesita el axioma de elección!

Para explicar, necesitamos algunas definiciones. Un conjunto U es *abierto* si cada punto de U está contenido estrictamente dentro de un

contorno (vecindad) de puntos, todos los cuales pertenecen a U. Por ejemplo, el interior de la esfera unidad $\{(x, y, z): x^2 + y^2 z^2 < 1\}$ es un conjunto abierto porque cada punto perteneciente a este conjunto puede ser el centro de un pequeño entorno, o bola, contenida completamente en el interior de esta esfera unidad. No puede decirse lo mismo de la bola $\{(x, y, z): x^2 + y^2 z^2 \leq 1\}$ que incluye su frontera, porque cualquier entorno de un punto de la frontera, no importa su pequeñez, debe extenderse fuera de la bola. Un conjunto U en un espacio V es *denso* si cada contorno (bola) de V contiene un punto de U. Por ejemplo, el conjunto de puntos en el espacio tridimensional que tiene coordenadas racionales es denso en el espacio tridimensional. El conjunto de puntos en el espacio tridimensional con coordenadas de enteros no es denso. Sencillamente, un conjunto es denso en otro si *llena* el segundo conjunto.

Dogherty y Foreman demostraron que para cualesquiera dos subconjuntos abiertos, acotados y no vacíos, A y B, del espacio n-dimensional ($n \geq 3$), hay una colección disjunta en pares de subconjuntos abiertos de A cuya unión es densa en B. Esto se hace sin el Axioma de elección. Como Foreman describe el resultado, podría encontrarse un subconjunto denso y abierto de una pelota de tenis, dividida en un número finito de subconjuntos abiertos y luego rearmar las piezas para formar un subconjunto denso y abierto del tamaño de un estadio. No podemos culpar al Axioma de elección de la paradoja ya que no es usado en la construcción. Con esta versión, la no constructibilidad deja de ser un problema y surge de nuevo la interrogante sobre la posible aplicación física. El tiempo lo dirá.

MAÑANA

¿Qué camino tomará el explorador en una excursión por los bosques? La decisión dependerá de la *curiosidad*, la *necesidad* y la *oportunidad*. La curiosidad dirigirá al excursionista hacia una vista interesante o una formación rocosa. El caminante decide dar vuelta a la izquierda y ascender hasta la cima de un cerro para tener una mejor vista de lo que hay más allá. Tal vez no sea práctico hacer esto, pero está de por medio la inquisitividad de la naturaleza humana. La necesidad puede obligarlo a tomar otras sendas. Acaso el explorador tenga sed y escoja la vereda más corta hacia el río o se canse y prefiera el camino fácil de regreso al campamento. Un tiempo malo intempestivo demanda que se halle un abrigo temporal mientras dura la tormenta. Una oportunidad inesperada podrá encaminarlo en cualquier otra dirección. Si la tormenta

se calma un momento, el caminante podrá avanzar de nuevo hasta el tiempo lo permita.

La curiosidad y la necesidad de nuestro explorador metafórico pueden igualarse a las matemáticas puras y las aplicadas. Hace un siglo, no había la distinción de hoy entre matemáticas puras y aplicadas. El notable matemático y escritor Paul Halmos caracteriza la diferencia (tal y como se informa de ella en Stewart 87, p. 224), describiendo al matemático puro como alguien que está consciente de la distinción, mientras que el matemático aplicado no cree que haya tal distinción. Las demandas de la física, la vida y las ciencias sociales dirigirán al matemático aplicado como lo hacen hoy. Ian Stewart considera la distinción entre puro y aplicado como una división autodestructiva que él, con optimismo, ve llegando a su fin. Percibe que las divisiones entre las subdisciplinas han empezado a borrarse a medida que se entrelazan. Stewart (Brockman 02, p. 32) escribe que:

> En los próximos cincuenta años se acelerará la tendencia hacia la mayor unificación, y pronto habrá sólo matemáticos, sin calificativos ni disputas sectarias. Seguirá habiendo especialistas, pero sus especialidades combinarán la lógica abstracta y el énfasis conceptual de las matemáticas puras con los intereses concretos de las aplicadas. Todos seremos matemáticos, todos parte de la misma gran empresa, disfrutando en nuestras pequeñas parcelas de la gran "exteligencia"[15] del pensamiento matemático.

Y agrega: "La edad de oro de las matemáticas no está en la antigua Grecia ni en el Renacimiento italiano ni en la Inglaterra de Newton, sino aquí y ahora. Y un lapso de cincuenta años seguirá siendo 'ahora".

Tampoco aquí vemos finales: sólo principios.

Así como el agua que corre serranía abajo toma el camino de la menor resistencia, la oportunidad trazará el curso de la investigación futura en el campo de las matemáticas. Cada nuevo teorema abre claramente puertas nuevas de oportunidad; las matemáticas son así por naturaleza. Lo que es único de nuestro tiempo y el futuro inmediato es la revolución de las computadoras, que empezó hace cincuenta años. Nuevos campos de estudio, como la programación lineal, la teoría de

---

[15] El término 'exteligencia' lo acuñaron Ian Stewart y Jack Cohen para referirse al capital cultural que todos tenemos a nuestro alcance en forma de leyendas, folklore, canciones y juegos infantiles, libros, películas, videos, etc. Lo contraponen a 'inteligencia', o procesos cognoscitivos que se dan dentro del cerebro. [T.]

juegos, la investigación de operaciones y la econometría germinaron como consecuencia de la potencia computacional. La computadora da al matemático y a todos los científicos oportunidades que siglos antes eran inimaginables. El significativo poder de comunicación y de realizar cálculos inauditos remueve obstáculos, permitiéndoles a los matemáticos seguir su curso *natural*, como resultado directo de estos avances tecnológicos. Sin que se le vea final a esta revolución, pasará cierto tiempo antes que los historiadores puedan valorar el efecto total que la revolución de las computadoras ha ejercido en las matemáticas puras y las aplicadas.

La *ley de Moore* establece que la potencia computacional se duplica cada dieciocho meses y ha sido acertada durante el pasado medio siglo. Desde los años cincuenta esta potencia se ha incrementado en un factor de diez mil millones. Si retrocedemos dieciocho años, la potencia de las computadoras se ha incrementado un billón de veces. La Internet (inter-redes) duplica su tamaño cada año, permitiendo la rápida diseminación, revisión y publicación de descubrimientos matemáticos por *email* (correo electrónico), grupos de noticias y publicaciones electrónicas. Los premios Nobel han recompensado trabajos cuya metodología principal es computacional. La computadora es ahora un instrumento indispensable para todas las ciencias matemáticas.

Conforme el mundo empequeñezca gracias a la comunicación electrónica, China estará produciendo matemáticos a una velocidad comparable a su tamaño. Más matemáticos = más matemáticas. ¡Más comienzos!

Para el lector que crea que la revolución terminará por sí sola, le sugerimos que lo piense otra vez. La revolución de las computadoras seguirá alimentándose a sí misma en las décadas venideras. La razón potencia/costo de las computadoras como equipo beneficiará la tecnología de los negocios más privados, las escuelas y los individuos. Nuevas generaciones de estudiantes expertos en computadoras ingresarán en las universidades de todo el mundo, lo cual influirá desde luego en la enseñanza, el aprendizaje y el quehacer matemático. La computadora ya es un aparato doméstico común y corriente, con microprocesadores cada vez más baratos y abundantes. La computadora será parte de nuestro medio inmediato, con microprocesadores esparcidos por todos lados como lo es hoy el papel. La persona promedio usará una computadora tan incidentalmente como hoy habla por teléfono o enciende la televisión.

En los años por venir, se espera que la tecnología de chips de silicio se vuelva obsoleta. El problema con los chips de silicio es que los alambres

que hay dentro de ellos se están volviendo cada vez más delgados y los electrones pueden escapar de los alambres o escapar de éstos por efecto *túnel*. Consecuentemente, hay límites, y debemos esperar tecnologías nuevas y mejores. Las *computadoras ópticas* usan rayos de luz en vez de alambres para transportar información digital a la velocidad de la luz, generando menos calor que los microchips comunes y corrientes. Científicos de la Bell Labs han construido transistores ópticos que regulan el flujo de luz. No espere que su próxima computadora sea óptica, pero ésta es el candidato legítimo para reemplazar la tecnología del silicio en los próximos años.

Han aparecido de pronto en el escenario las *computadoras de ADN*, algunas de las cuales ya han sido construidas y pueden resolver problemas matemáticos con más rapidez que las supercomputadoras de hoy. Imagínese la computadora de ADN como un tubo de ensayo que contiene 10^{20} moléculas, todas ellas haciendo cálculos simultáneamente. Las computadoras de ADN pueden calcular en grandes números de moléculas simultáneamente y son mil millones de veces más eficientes en cuanto al uso de la energía que las computadoras con chips de silicio. En consecuencia, una onza (29.6 mililitros) de ADN podría ser 100 000 veces más rápida que la computadora más rápida de la actualidad. La información se almacena digitalmente, reemplazando los ceros y unos de la tecnología de silicio con los símbolos A, T, C y G, que corresponden a las iniciales de los cuatro ácidos nucleicos que componen el ADN (adenina, timina, citosina y guanina). La capacidad de almacenamiento es colosal: un centímetro cúbico de ADN puede contener 10^{21} bits de información, el equivalente de un billón de discos compactos. Cuatrocientos cincuenta y tres gramos en 946 litros de líquido serían capaces de almacenar más contenido de memoria que todas las computadoras fabricadas hasta la fecha.

Como ocurre con toda tecnología nueva, hay una desventaja. El ADN se descompone y no sirve para almacenar información durante períodos prolongados. El almacenamiento a largo plazo necesitaría que los datos se transfirieran a una memoria común y corriente.

La computadora última –*la computadora cuántica*– está hoy en la etapa de proyecto. Los alambres y la circuitería de las computadoras comunes son reemplazados por ondas cuánticas y la unidad fundamental de información es el bit cuántico o *qbit*. Tales computadoras serían astronómicamente más potentes que las supercomputadoras de hoy. La velocidad potencial de un cómputo en una computadora cuántica es materialmente incomprensible. Considérese que harían falta 1600 com-

putadoras conectadas por Internet durante ocho meses para factorizar un número de 129 cifras. Peter Shor, de los Laboratorios Bell AT&T, ha ideado un algoritmo para computadora cuántica que podría descomponer en factores un número de 10^{200} cifras (sí, cifras) ¡en segundos! Las aplicaciones están en el campo de la codificación (privacía financiera, seguridad natural, etc.) que se basa en la dificultad inherente de factorizar grandes números compuestos.

En teoría, una computadora cuántica es capaz de modelar perfectamente cualquier proceso físico y las aplicaciones son ilimitadas.

Pero aquí también hay un inconveniente. Los transistores cuánticos y las computadoras son en extremo vulnerables a la contaminación. Un solo rayo cósmico o partícula atómica podría corromper un cómputo, por lo que haría falta alojar y aislar esta clase de computadoras en los llamados *cuartos limpios*. El progreso de la tecnología de computadoras cuánticas es lento y que se conviertan en realidad puede aún tomar un siglo. Los pensamientos de hoy sobre la computación cuántica son una fantasía: el comienzo de la realidad de mañana.

¿Pero afectará todo esto el modo natural de demostrar teoremas matemáticos, como el dé Banach-Tarski? La tecnología de las computadoras, producto de la ciencia de la computación y en cierto grado de las matemáticas puras, recompensará el favor sirviendo de instrumento poderoso al matemático puro, no sólo como medio de computación y de comunicación sino también cambiando la manera misma como los matemáticos hagan matemáticas.

Hace un siglo la demostración típica de un teorema matemático era relativamente breve y la efectuaba un solo individuo. Al crecer el corpus del conocimiento matemático, las demostraciones se fueron volviendo más largas, y a menudo las elaboraban varios matemáticos. La famosa demostración de Andrew Wiles del Último Teorema de Fermat consta de cosa de doscientas páginas, y al principio se aceptó principalmente por la reputación de Wiles. Se estima que menos de uno de cada 1000 matemáticos profesionales está capacitado para evaluarla. Si bien Wiles no usó una computadora para hacer su demostración, cabe la pregunta de si hay un límite a la complejidad que puede alcanzarse sin el auxilio de una computadora.

En *The Death of Proof* [La muerte de la demostración] John Horgan se pregunta (Horgan 93, p. 93) si "la demostración del Último Teorema de Fermat fue el último suspiro de una cultura agonizante". Puede haber un límite a lo que puede escribirse, revisarse y comprobarse sin la ayuda de una computadora.

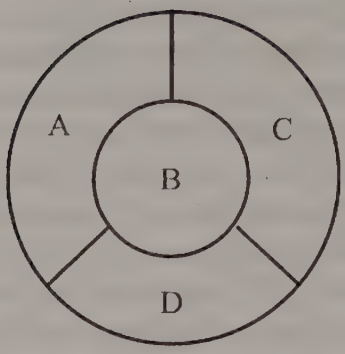


Figura 8.1. Mapa plano que requiere de cuatro colores.

El récord, por así decirlo, seguramente lo tiene la clasificación publicada de los grupos simples finitos. Editada en la década de los años ochenta, la obra completa consta de 15 000 páginas, y en su elaboración contribuyeron más de 100 personas. ¿Habrá en el mundo algún matemático que la haya leído palabra por palabra? No lo sé.

Ha habido varios casos, bien conocidos, de demostración auxiliada por computadora. La más notable es la solución al *Four-Color-Map Problem* [Problema del mapa de cuatro colores], publicada en 1976 por Kennet Appel y Wolgang Haken. Se conjeturaba que bastaba con cuatro colores para iluminar cualquier mapa plano, de modo que no hubiera dos regiones vecinas con el mismo color (figura 8.1). Appel y Haken redujeron el problema a 2000 casos especiales que requirieron de 1 000 horas de tiempo de computadora para establecer la demostración. Tiene uno que confiar en los programas, la computadora y sus componentes así como el código de computación para aceptar la demostración, pues es demasiado larga para comprobarla manualmente.

En 1998, Thomas Hales, de la universidad de Michigan, resolvió la *conjetura de empaquetamiento de esferas, de Kepler,* demostrando que las maneras más eficientes (densas) de empaquetar esferas de igual tamaño consisten en escalonar las hileras del primer nivel y luego colocar las de los niveles superiores en los huecos dejados por el primer nivel. Según la manera como se escalonen las capas sucesivas, hay muchos procedimientos que dan lugar a la densidad óptima de

$$\frac{\pi}{18} \approx 74\%$$

Los empaquetamientos más conocidos son *el apretado cúbico (empaquetamiento centro-cara)* y el *apretado hexagonal (como panal de abejas)* (figura 8.2).

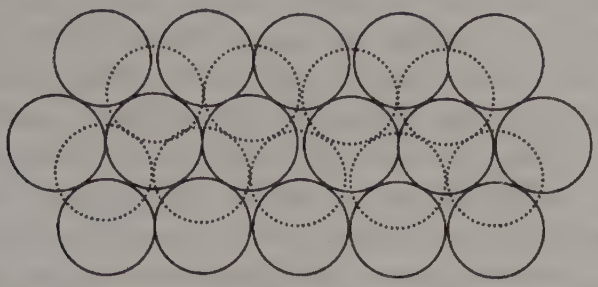


Figura 8.2. Empaquetamiento apretado para densidad óptima de esferas.

Johannes Kepler (1571-1630), conocido ante todo por sus leyes del movimiento planetario, fue el primero en proponer la densidad descrita en párrafos anteriores como la óptima. Esto significa que ningún empaquetamiento de esferas del mismo radio en el espacio tridimensional produciría una densidad mayor que la del empaquetamiento cúbico (o hexagonal). El concepto es de lo más intuitivo y los tenderos lo han aplicado por siglos para acomodar naranjas, manzanas, etc. (Hales observa que es más problemático acomodar alcachofas.) Sin embargo, una demostración formal de la conjetura ha eludido a los matemáticos durante cientos de años. Es el problema más antiguo de la geometría discreta y aparece como parte del problema 18 de la lista de Hilbert.

Publicada en 1998, la demostración de Hales son 250 páginas de texto y gigabytes de programas y datos de computadora. Hales hace ver (An Update on Hale's Proof... 04, p. 3) que "casi todos los aspectos de la demostración se cifran en verificación por computadora". Desde que fue escrita, los árbitros no han podido comprobar a mano la demostración; sencillamente es demasiado larga. Si sus detalles no pueden ser certificados, ¿no será aceptada la demostración? Las opiniones varían.

Hales está proponiendo un medio único de certificación definitiva de la demostración. Está tratando de crear una *demostración formal* de la conjetura en que el programa de la computadora verifique línea por línea. La iniciativa, conocida como *Flyspeck Project* (literalmente "Proyecto de escrutinio" pero en realidad *FPK* es acrónimo de *Formal Proof of Kepler)* podría requerir de hasta 20 años de trabajo. Exigiría mucha colaboración e instrumentos (como Internet, computadoras de

gran potencia) que no existían hace 50 años. Se puede obtener más información en http://www.pitt.edu/-thales/flyspeck/index.html.

Se esperan más de estas demostraciones por computadora en los próximos años. Un giro imprevisto que tiene que ver con esta clase de demostraciones es la *demostración probabilista*, que asigna una probabilidad estadística a la validez de una demostración. Se pueden analizar las demostraciones largas y complejas y asignarles una probabilidad que indique la probabilidad de que una demostración sea válida. ¿Cómo deberán interpretar los matemáticos una demostración que tiene una probabilidad de 99% de ser válida? Esto dependería seguramente del matemático y de la naturaleza del teorema. No hay en realidad nada nuevo en el concepto, pues los especialistas en estadística asignan tales probabilidades al comprobar hipótesis científicas. Las revistas científicas informan de descubrimientos en términos de *niveles de confianza*, *niveles de significación* y *valores de probabilidad* o *p-valores*, que miden el grado en que una hipótesis puede ser respaldada o rechazada. La comprobación estadística de hipótesis en realidad nunca demuestra la veracidad de una hipótesis de una manera o de otra, sino que más bien resume los hallazgos y comunica una probabilidad estadística de que sea verdad. Pero tales ideas son nuevas para los matemáticos puros para los cuales la verdad no aparece en diferentes tonos de gris.

Además del cambio de estilo de la demostración, hay algunos matemáticos que van más allá, al extremo de sugerir que la *demostración* perderá su categoría de regla de oro de la verdad matemática.

Como resultado directo de la revolución de las computadoras, el venerable y tradicional modo de hacer matemáticas, de *teorema-demostración*, está sufriendo cambios fundamentales. La potencia computacional, la Internet y el predominio de las computadoras de escritorio han dado origen a un nuevo estilo de hacer matemáticas, conocido como *matemáticas experimentales*. Empleando la computadora como *lápiz rápido* el matemático puede explorar estructuras, buscar patrones y comprobar conjeturas de maneras antes inconcebibles. El matemático experimental usa la computadora para entender fenómenos matemáticos, al igual que los biólogos se valen del microscopio en el laboratorio. La visualización de los fenómenos en autómatas celulares, la teoría del caos y las aplicaciones de los fractales serían imposibles sin una computadora. El matemático del futuro estará en condiciones de igualdad con los demás científicos que han aprovechado la asistencia tecnológica por siglos. Se están formando departamentos de matemáticas experimentales en las universidades de todo el mundo y

la revista *Experimental Mathematics* exhibe las matemáticas inspiradas en la experimentación.

Como instrumento de virtualización, la computadora se ha usado para ilustrar la interpretación en el plano hiperbólico del teorema de Banach-Tarski, descubierta por Stan Wagon y Jan Mycielski en 1984, y presentada en el apéndice del capítulo 1 de este libro. Las figuras que aparecen en éste originalmente se dibujaron a mano. En el artículo "A Hyperbolic Interpretation of the Banach-Tarski Paradox" (Wagon 93a), se utilizó el *software* [programa] *Mathematica* para dibujar las figuras e ilustrar el álgebra de la teoría de grupos que se halla detrás de la paradoja. Curtiss Bennett utilizó el mismo software para producir la versión de Escher de la paradoja (Bennett 00). (En el apéndice del capítulo 1 se hace una sinopsis del artículo de Bennett.) Wagon escribe (Wagon 93b, p. xviii) que "desde luego, las computadoras no han desempeñado el mismo papel en este campo que en la teoría de los números o los sistemas dinámicos. Aun así, algo han tenido que ver... En otras palabras ... [figuras] que fueron descubiertas concienzudamente y hechas a mano ahora se pueden elaborar con mucho menos esfuerzo con una computadora. Lo más emocionante es que esto abre la posibilidad de proseguir nuevas exploraciones en esta dirección.

Las matemáticas experimentales no han dejado de provocar polémica. Algunos las consideran mera moda. Un tradicionalista se refiere a la revista mencionada en párrafos anteriores como la *Revista de los Teoremas No Demostrados*. La renuencia a cambiar es entendible. Ronald Graham de los Laboratorios Bell AT&T comenta (Horgan 93, p. 103) que "sería muy desalentador que algún día se le pudiera preguntar a la computadora si es cierta la Hipótesis de Riemann y ella contestara 'Sí, es verdadera, pero usted no será capaz de entender la demostración'".

Yo creo que los vaticinios de la muerte de la demostración son prematuros. La experimentación conduce a la intuición y a la conjetura; nunca sustituirá la certidumbre asociada con la demostración. Al contrario, la conjetura que siga a la experimentación llevará a un número siempre creciente de teoremas nuevos y sus demostraciones. La demostración seguirá siendo el árbitro supremo de la verdad matemática.

La fuente de la belleza y el poderío de las matemáticas están en su certeza absoluta. No debemos esperar que los teoremas sean reemplazados por términos como *es probable que* y que el *QED* ("Quod erat demostrandum" = "que era lo que queríamos demostrar") que aparece al final de una demostración sea suplantado por *Puedes apostar a que es así. ¡Confía en mí!* La demostración nunca morirá y hay en nuestro mundo

abundancia de espacio para que el matemático experimental, aplicado y puro descubra, cree y colabore. Estamos apenas al principio.

Contaba Hilbert que un viejo matemático francés le dijo una vez "Una teoría matemática no debe considerarse completa hasta que no se aclare tanto que pueda usted explicársela al primer hombre que se encuentre en la calle". Así las cosas, hay un largo camino por recorrer en lo tocante al teorema de Banach-Tarski y otras paradojas de las matemáticas teóricas. No hay final a la vista. ¡Disfrutemos, pues, del viaje!

BIBLIOGRAFÍA

ACZEL, A. *The Mystery of the Aleph.* Four Walls Eight Windows, Nueva York, 2000.

ADDISON, J. W. "Obituary for Alfred Tarski", *California Monthly.* Vol. 94, núm. 2, p. 28, California, 1983.

ALBERS, D. J., G. L. Alexanderson y C. Reid (eds.). *More Mathematical People: Contemporary Conversations.* Harcourt Brace Jovanovich, Inc., Boston, 1990.

AN Update on Hales' Proof of Kepler's Conjeture. *Focus: The Newsletter of the Mathematical Association of America.* Vol. 24, núm. 5, p. 3, Washington, 2004.

AQUINO, Sto. T. *Summa Theologiae.* Citado en R. Rucker, *Infinity and the Mind.* Birkhäuser, Boston, 1982.

ARISTÓTELES. *Physica III.* Citado en C. Boyer, *The History of the Calculs and its Conceptual Development.* Dover Publications, Inc., Nueva York, 1949.

ARNOLD, V., M. Atiyah, P. Lax y B. Mazur (eds.). *Mathematics: Frontiers and Perspectives.* International Mathematical Union, Princeton, 2000.

AUGENSTEIN, B. "Hadron Physics and Transfinite Set Theory", *International Journal of Theoretical Physics.* Vol. 23, núm. 12, pp. 1197-1205, 1984.

_____. "Speculative Model of Some Elementary Particle Phenomena", *Speculations in Science and Technology.* Vol. 17, núm. 1, pp. 21-26, 1994.

_____. "Links between Physics and Set Theory", *Chaos, Solitons and Fractals.* Vol. 7, núm. 11, pp. 1761-1798, 1996.

BANACH, S. y A. Tarski. "Sur la decomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents", *Fundamenta Mathematicae.* Vol. 6, pp. 244-277, 1924.

BARROW, J. *The World within the World.* Clarendon Press, Oxford, 1988.

_____. *Pi in the Sky.* Clarendon Press, Oxford, 1992.

_____. *The Constants of Nature: From Alpha to Omega: the Numbers That Encode the Deepest Secrets of Universe.* Pantheon Books, Nueva York, 2002.

BASS, T. y A. Martin. "Road to Ruin", *Discover.* Vol. 13, núm. 5, pp. 56-61, 1992.

BELL, E. T. *Men of Mathematics.* Simon and Schuster, Nueva York, 1965.

BENNET, C. "A Paradoxical View of Escher's Angels and Devils", *The Mathematical Intelligencer.* Vol. 22, núm. 3, pp. 39-46, 2000.

BICKEL, P. J., E. A. Hammel y J. W. O'Connell. "Sex Bias in Graduate Admissions: Data from Berkely", *Science.* Vol. 187, núm. 4175, pp. 398-404, 1940.

BLUMENTHAL, L. M. "A Paradox, A Paradox, A Most Ingenious Paradox", *The American Mathematical Monthly.* Vol. 47, pp. 346-353, 1940.

BOLZANO, B. *Paradoxes of the Infinite.* Trad. de F. Prihonsky, Routledge and Kegan Paul Ltd, Londres, 1950.

BOREL, E. *Leçons sur la théorie des fonctions.* Citado en G. Moore, *Zermelo's Axiom of Choice.* Springer-Verlag, Nueva York, 1982.

BOYER, C. *The History of the Calculus and its Conceptual Development.* Dover Publications, Inc., Nueva York, 1949.

_____. *A History of Mathematics.* John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1968.

BROCKMAN, J. (ed.). *The Next Fifty Years.* Vintage Books, Nueva York, 2002.

BROWN, W. "New-wave Mathematics", *New Scientist.* Vol. 131, núm. 1780, pp. 33-37, 1991.

CASTI, J. L. *Five Golden Rules: Greath Theories of 20th Century Mathematics –and Why They Matter.* John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1996.

CASTI J. L. y W. DePauli. *Gödel.* Perseus Publishing, Cambridge, 2000.

COFFIN, S. *The Puzzling World of Polyhedral Dissections.* CD-ROM, Puzzle World Productions, Oregonia, OH, 1998. Disponible en http://johnrausch.com/PuzzlingWorld/default.htm

CORCORAN, J. "Review of Alfred Tarski Collected Papers Volumen IV", *Mathematical Reviews.* Vol. 91h, p. 4127, 1991.

COURT, N. *Mathematics in Fun and in Earnest.* The Dial Press, Nueva York, 1958.

CROFT, H., K. Falconer y R. Guy. *Unsolved Problems in Geometry.* Springer-Verlag, Nueva York, 1991.

CRUTCHFIELD, J., J. Farmer, N. Packard y R. Shaw. "Chaos", *Scientific American.* Vol. 255, núm. 6, pp. 46-57, 1986.

DAUBEN, J. *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* Harvard University Press, Cambridge, 1979.

DAVIS, P. y R. Hersch. *The Mathematical Experience.* Houghton Mifflin Company, Boston, 1981.

DAWSON, J. "Gödel and the Limits of Logic", *Scientific American.* Vol. 280, núm. 6, pp. 76-81, 1999.

DEVLIN, K. *The Millennium Problems.* Basic Books, Nueva York, 2002.

DEWDNEY, A. K. "Computer Recreations: A Matter Fabricator Provides Matter for Thought", *Scientific American.* Vol. 260, núm. 4, pp. 116-119, 1989.

DOTY, R. *The Macmillan Encyclopedic Dictionary of Numismatics.* Macmillan Publishing Co., Inc., Nueva York, 1982.

DOUGHERTY R. y M. Foreman. "Banach-Tarski Paradox Usin Pieces with the Property of Baire", *Proceedings of the National Academy of Sciences.* USA, Vol. 89, pp. 10726-10728, 1992.

_____. "Banach-Tarski Decompositions Using Sets with the Property of Baire", *Journal of the American Mathematical Society.* Vol. 7, núm. 1, pp. 75-124, 1994.

DOUGLIS, A. *Ideas in Mathematics.* W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1970.

DUBINS, L., M. W. Hirsch y J. Karush. "Scissors Congruence", *Israel Journal of Mathematics.* Vol. 1, pp. 239-247, 1963.

EINSTEIN, A. "Ether and the Theory of Relativity (conferencia impartida el 5 de mayo de 1920, en la Universidad de Leyden). En *Sidelights on Relativity.* Dover Publications, Inc., Nueva York, 1983.

EL NASCHIE, M. S. "On the Initial Singularity and the Banach-Tarski Theorem", *Chaos, Solitons and Fractals.* Vol. 5, núm. 7, pp. 1391-1392, 1995.

_____. "Banach-Tarski Theorem and Cantorian Micro Space-Time", *Chaos, Solitons and Fractals.* Vol. 5, núm. 8, pp. 1503-1508, 1995.

EVES, H. *A Survey of Geometry. Volumen Uno.* Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1963.

_____. *Great Moments in Mathematics After 1650.* The Mathematical Association of America, Washington DC, 1983.

_____. *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics.* Dover Publications, Inc., Mineola, 1990.

FALLETTA, N. *The Paradoxicon.* John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1983.

FEFERMAN, A. "Alfred Tarski", *American National Biography Online.* Febrero, pp. 1-5, 2000, en http://www.anb.org

FEFERMAN, A. B. y S. Feferman. *Alfred Tarski: Life and Logic.* Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

FEYNMAN, R. *The Character of Physical Law.* The MIT Press, Cambridge, 1965.

FREDERICKSON, G. *Dissections: Plane and Fancy.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

FRENCH, R. "Multiplier les petite pains avec le Theoreme de Banach-Tarski", *Pour la Science.* Vol. 112, pp. 113-118, 1987. Versión en inglés: "The

Banach-Tarski Theorem", *The Mathematical Intelligencer.* Vol. 10, núm. 4, pp. 21-24, 1988.

GALILEO, G. *Two New Sciences.* Traducido por S. Drake, The University of Wisconsin Press, Madison, 1974.

GARDNER, M. *Mathematics, Magic and Mystery.* Dover Publications, Inc., Nueva York, 1956.

_____. *Mathematical Puzzles and Diversions.* Simon and Schuster, Nueva York, 1959.

_____. (ed.). *Mathematical Puzzles of Sam Loyd.* Dover Publications, Inc., Nueva York, 1959.

_____. *The Incredible Dr. Matrix.* Charles Scribner's Sons, Nueva York, 1976.

GARDNER M. y B. Fennel. "Gardner on Gardner: JPBM Communications Award Presentation", *Focus: The Newsletter of the Mathematical Association of America.* Vol. 14, núm. 6, pp. 9-33, 1994.

GELL-MANN, M. *The Quark and the Jaguar.* W. H. Freeman and Company, Nueva York, 1994.

GIVANT, S. "A Portrait of Alfred Tarski", *The Mathematical Intelligencer.* Vol. 13, núm. 3, pp. 16-32, 1991.

GLEICK, J. *Chaos: Macking of a New Science.* Penguin Books, Nueva York, 1987.

GRATTAN-GUINESS, I. *The Search for Mathematical Roots 1870-1940.* Princeton University Press, Princeton, 2000.

GRIBBIN, J. "Pay Attention, Albert Einstein", *New Scientist.* Vol. 137, núm 1854, pp. 28-31, 1993.

_____. "The Prescient Power of Mathematics", *New Scientist.* Vol. 141, núm. 1909, p. 14, 1994.

_____. *Schrödinger's Kittens and the Search for Reality.* Brown and Company, Little, 1995.

HALLIWELL, J. "Quantum Cosmology and the Creation of the Universe", *Scientific American.* Vol. 265, núm. 6, pp. 76-85, 1991.

HAUSDORFF, F. *Foundations of Set Theory,* 1914. Citado en M. Kline, *The Loss of Certainty.* Oxford University Press, p. 204, 1980.

HINTIKKA, J. *On Gödel.* Wadsworth Philosopher Series, Belmont, 2000.

HOFSTADTER, D. *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid.* Basic Books, Nueva York, 1979.

HORGAN, J. "The Death of Proof", *Scientific American.* Vol. 269, núm. 4, pp. 92-103, 1993.

JECH, T. *The Axiom of Choice.* North-Holland, Amsterdam, 1973.

JONES, R. *Physics as Metaphor.* University of Minnesota Press, Minéapolis, 1982.

KAKU, M. *Visions: How Science Will Revolutionize the 21st Century.* Doubleday, Nueva York, 1997.

KALUZA, R. *Through a Reporter's Eyes: The Life of Stefan Banach.* Birkhäuser, Boston, 1996.

KANAMORI, A. "The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen", *The Bulletin of Symbolic Logic.* Vol. 2, núm. 1, pp. 1-71, 1996.

KANE, G. "The Dawn of Physics Beyond the Standard Model", *Scientific American.* Vol. 288, núm. 6, pp. 68-75, 2003.

KLEE, V. y S. Wagon. *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory.* The Mathematical Association of America, Washington DC, 1991.

KLINE, M. *The Loss of Certainty.* Oxford University Press, Nueva York, 1980.

LACZKOVICH, M. "Equidecomposability and Discrepancy: A Solution to Tarski's Circle-Squaring Problem", *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik.* Vol. 404, núm. 1990, pp. 77-117, 1990.

LORENZ, E. *The Essence of Chaos.* University of Washington Press, Seattle, 1993.

MAOR, E. *To Infinity and Beyond.* Princeton University Press, Princeton, 1987.

MEHRA, J. (ed.). *The Physicist's Conception of Nature.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1973.

MOORE, G. *Zermelo's Axiom of Choice.* Springer-Verlag, Nueva York, 1982.

_____ ."Sixty Years After Gödel", *The Mathematical Intelligencer.* Vol. 13, núm. 3, pp. 6-11, 1991.

MYCIELSKI, J. "On the Paradox of the Sphere", *Fundamenta Methematicae.* Vol. 43, pp. 348-355, 1955.

NAGEL, E. y J. Newman. *Gödel's Proof.* New York University Press, Nueva York, 2001.

OSOFSKY, B. y S. Adams. "Problem 6102 and Solution", *The American Mathematical Monthly.* Vol. 85, núm. 6, p. 504, 1978.

PENROSE, R. *The Emperor's New Mind.* Oxford University Press, Oxford, 1989.

PETERSON, I. *Islands of Truth: A Mathematical Mystery Cruise.* W. H. Freeman and Company, Nueva York, 1990.

PICKERING, A. *Constructing Quarks: A Sociological History of Particle Physics.* The University of Chicago Press, Chicago, 1984.

REID, C. *Introduction to Higher Mathematics for the General Reader.* Thomas Y. Crowell Company, Nueva York, 1959.

RICHTER, C. "Congruence by Dissection of Topological Discs: An Elementary Approach to Tarski's Circle Squaring Problem", *Discrete and Computational Geometry.* Vol. 28, pp. 427-442, 2002.

ROBINSON, R. M. "On the Descomposition of Spheres", *Fundamenta Mathematicae.* Vol. 34, pp. 246-260, 1947.

ROYDEN, H. L. *Real Analysis.* The Macmillan Company, Toronto, 1968.

RUCKER, R. *Infinity and the Mind.* Birkhäuser, Boston, 1982.

SANGALLI, A. "Forum: Who Needs Mathematics?: Arturo Sangalli Searches for a Meaning to Mathematical Life", *New Scientist.* Vol. 129, núm. 1762, pp. 44-45, 1991.

SCHILPP, P. A. (ed.). *The Philosophy of Bertrand Russell.* Tudor, Nueva York, 1951.

SCHUSTER, H. *Determinist Chaos.* VCH Publishers, Weinheim, 1988.

SIERPINSKI, W. *On the Congruence of Sets and Their Equivalence by Finite Descomposition.* Lucknow University, Lucknow, 1954.

STEIN, S. *Mathematics: The Man-Made Universe.* W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1963.

STEWART, I. *The Problems of Mathematics.* Oxford University Press, Oxford, 1987.

_____. "The Ultimate Jigsaw Puzzle", *New Scientist.* Vol. 130, núm. 1764, pp. 30-33, 1991.

_____. "Does Chaos Rule the Cosmos?", *Discover.* Vol. 13, núm. 11, pp. 56-63, 1992.

_____. "Paradox the Spheres", *New Scientist.* Vol. 145, núm. 1960, pp. 28-31, 1995.

_____. *From Here to Infinity.* Oxford University Press, Oxford, 1996.

_____. *Does God Play Dice.* Blackwell Publishing, Malden, 2002.

STROMBERG, K. "The Banach-Tarski Paradox", *American Mathematical Monthly.* Vol. 86, pp. 151-161, 1979.

SU, F. "The Banach-Tarski Paradox", PhD. Minor Thesis, Harvard University, 1990.

SUTTON, C. "World of Quarks", *New Scientist.* Vol. 139, núm. 1881, pp. 1-4 (inserto entre la 42 y la 43), 1993.

SVOZIL, K. *Randomness and Undecidability in Physics.* World Scientific, Singapur, 1993.

_____. "Set Theory and Physics", *Foundations of Physics.* Vol. 25, núm. 11, pp. 1541-1560, 1995.

_____. "'Linear' Chaos Via Paradoxical Set Decompositions", *Chaos, Solitons and Fractals.* Vol. 7, núm. 5, pp. 785-793, 1996.

TWAIN, M. *Following the Equator: A Journey Around the World.* The American Publishing, Co., Hartford, 1897.

VILENKIN, N. *Stories About Sets.* Academic Press Inc., Nueva York, 1968.

WAGNER, C. H. "Simpson's Paradox in Real Life", *The American Statistician.* 39, pp. 46-48, 1982.

WAGNER, J. *The Search for Signs of Intelligent Life in the Universe.* Harper and Row Publishers, Nueva York, 1986.

WAGON, S. *The Banach-Tarski Paradox.* Cambridge University Press, Nueva York, 1985.

_____. "A Hyperbolic Interpretation of the Banach-Tarski Paradox", *The Mathematica Journal.* 3, pp. 58-61, 1993.

_____. "Preface to the Paperback Edition". In *The Banach-Tarski Paradox.* Paperback, Cambridge University Press, Nueva York, 1993.

WILDER, R. *Introduction to the Foundations of Mathematics.* John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1952.

Yandell, B. *The Honors Class.* A K Peters, Natick, 2002.

YOUNGS, D. "Lost in Space", *AIMS Education Foundation.* 22 de marzo de 2002, en http://www.aimsedu.org/Puzzle/LostInSpace/space.html

ZIPPIN, L. *Uses of Infinity.* Random House, Inc., Nueva York, 1962.

ÍNDICE ANALÍTICO

absorbido 122
acertijo de "Fuera de la Tierra" 75, 79
acertijo del electrón-muón 209
Adams, Ansel 18
ADN 226
álef 28
anagrama 200
Antigua Grecia, 218
antinomia 74
antinomia de Russell 74
Appel, Kenneth 228
Aquiles 22
Aquino, Santo Tomás de 23
Aristóteles 23
aritmética transfinita 17, 21, 136
asociatividad 107
astronauta que se desvanece, el 76
atractor 205
atractor extraño 208
atractores de ciclo límite 206
atractores de un punto solo 206
atractores toroidales 206
Augenstein, Bruno 200, 202, 204, 209-214
autorreferencia 46
Axioma de elección 14, 17, 29, 32-34, 38, 40, 45, 49, 51, 53-55, 57, 59, 62, 64, 98-99, 116, 233, 155, 157, 162, 174-175, 189-190, 192-194, 197, 199, 215, 218, 222-223

Babilonios 218
Bach, Johann Sebastian 62
Bair, René 33
Banach, Stefan 34
Beltrami, Eugenio 58
Bernstein, Felix 33
Bers, Lipman 18

biyección 130, 133, 141-143, 145-147
Bolyai, Johan 57
Bolzano, Bernard 131, 139
Borel, Emile 33

Café Scottish. Véase Szkocka Café
Cantor, Georg 12, 15, 17-18, 21-32, 38, 40, 45, 54-56, 59, 95, 97-99, 129-130, 132, 139, 144-145, 218
caos 204
caos lineal 208
cardinalidad 24, 25, 27-30, 91, 139
Carnap, Rudolf 42, 46
Casimir, Hendrick 201
chip de silicio 225
cierre 107
Círculo de Viena 42, 46
clases de equivalencia 155, 157
clasificación de los grupos simples finitos 228
Clay Mathematics Institute of Cambridge, Massachusetts (CMI) 219
Cohen, Joel 68
Cohen, Paul 17, 29, 34, 97
complemento de un conjunto 93
comportamiento de transposición de las reacciones hadrónicas 210
computadora cuántica 226
computadoras de ADN 226
computadores ópticos 226
Congreso Internacional de Matemáticos 56
congruencia de rompecabezas 120
congruencia por disección (equivalencia de descomposición) 120
congruencia por equivalencia de descomposición 128, 178
congruente 99
conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer 221
Conjetura de Hodge 222
conjetura de Poincaré 221
conjetura del empaquetamiento de esferas, de Kepler 228
conjunto bien ordenado 29
Conjunto de Cantor 149
conjunto de elección 32, 175
conjunto de puntos 90
conjunto de Vitali 155
conjunto infinito 129
conjunto no mensurable 155, 192
conjunto nulo 91
conjunto potencia 95
conjunto universal 91
conjunto vacío 91
conjuntos 90
constructivista 19
contable 25
continuo 139

Copérnico, Nicolás 190
correspondencia uno a uno (biunívoca) 121
cosmología 203
cuadratura del círculo 117
cubo de Soma 117
Curry, Paul 82
curva de Hilbert 146
curva que llena el espacio 146

Dedekind, Richard 132, 145
definición de Dedekind 132
definición de inyección 132
Dehn, Max 119
demostración del teorema de Banach-Tarski. Véase Teorema de Banach Tarski, demostración del
demostración formal 229
demostración probabilista 230
denso 26, 223
desapariciones de Loyd 75
desplazamiento desde el infinito 122, 125, 134
desplazamiento hacia el infinito 122, 133
determinismo científico 59
Dewdney, A. K. 198
diccionario Hyperwebster 159, 165
diferencia de conjuntos 94

dinámica no lineal 204
disco de Poincaré 63
Dougherty, Randal 222
Dudeney, Henry E. 109, 114
duende que se desvanece, el 76
Dyer, Wayne, Dr. 213

ecuaciones de Fitzgerald-Lorenz 191
ecuaciones de Navier Stokes 221
efecto mariposa 207
egipcios antiguos 218
Eigen, Manfred 195
Einstein, Albert 50, 191, 213
El Naschie, M. S. 203, 208, 214
empaquetamiento centrado en las caras 229
empaquetamiento cúbico apretado 229
empaquetamiento hexagonal apretado 229
energía de punto cero 202
equidescomponible 121, 128, 136, 158, 178
equivalencia de descomposición 89, 128
Escher, Maurits C. 61, 231
espacio de fases 208
estiramiento 139

fabricadores 198
fabricadores digitales 198
Feferman, A. B. 43
Feynman, Richard 193
filosofía Go-Go 202
finitista 19
física de partículas 209
Foreman, Matthew 222
formalismo 19
Fränkel, Abraham 31
French, Robert 172, 177
función zeta de Riemann 220
Fundamenta Mathematicae 37, 39, 162

Galilei, Galileo 130, 190
Gamov, George 203
Gardner, Martin 73, 80, 118, 215
Gauss, Carl Friedrich 23, 57, 219
geometría de Lobachevsky, Nicolai 58
geometría de taxis 58
geometría esférica (de Riemann) 58
geometría hiperbólica 59
geometría no euclidiana 58
Givant, Steven 44
Gödel, Kurt 15, 17, 45
Graham, Ronald 18, 231
Gribbin, John 213
grupo 107

Hacia la paradoja BT 129
Hadamard Jaques 33
hadrones 209
Hahn, Hans 46
Haken, Wolfgang 228
Hales, Thomas 228
Halmos, Paul 224
Hardy, G. H. 195
Hausdorff, Felix 30, 38, 97
Hawking Stephen 203
Hein, Piet 117
Hilbert, David 29, 53, 60, 119, 146, 218
Hipótesis de la brecha de masa 220
hipótesis de Riemann 219, 231
Hipótesis del continuo 29, 49, 54, 97, 218
Hipótesis del continuo, de Cantor 29, 45, 51
Hofstadter, Douglas R. 62
Horgan, John 227
Hotel de Hilbert 122
Hoyle, Fred 203
identidad 107

imagen 99
Impresoras tridimensionales 199
incertidumbre, Principio de 59
infinitud 21
intersección de 92
intuicionista 19
invariante de Dehn 199
inverso 86, 204
inyección 130, 142
isometrías 99

Jones, Roger 209, 214,

Kepler, Johannes 190, 228
Kronecker, Leopold 24, 30, 54, 132

Laczkovich, Miklos 116
Laplace, Pierre-Simon 59
Lebesgue, Henri 33
leptones 209
ley de Moore 225
limerick 200
Lindeman, Ferdinand 117
longitud de una rotación 170
Lorenz, Edward N. 206
Loyd, Sam 75, 109

Máquina de la Verdad Universal 47
Matemática 215
matemáticas experimentales 230
matriz 103
matriz producto 104
Mazurkiewicz, Stefan 162
McKenzie, Ralph 44
mecánica cuántica 59
medida 138, 192
medida de Lebesgue 149, 192
Menger, Karl 46
mesones 209
metalenguajes 75
metamatemáticas 218
Mills, Robert 220
Modelo Estándar de la física de partículas 209
Moore, E. H. 146
Morganstern, Oskar 50
Mycielski, Jan 62, 211, 231

neutrones 209
Newton, Isaac, Sir 190
numerable 25

número cardinal 98
número de Gödel 47
número ordinal 98
números complejos 165
Números racionales 25

órbita 175, 205

paradoja 57

paradoja de Banach-Tarski 13, 129
paradoja de Braess 68
paradoja de Burali-Forti 30, 98, 200
Paradoja de Cantor, 98
Paradoja de dicotomía 22
paradoja de Hausdorff 38, 62, 64, 168, 174
paradoja de Russell 99
paradoja de Simpson 71, 85
paradoja del barbero 74
paradoja del chícharo y el sol 14, 168
Paradoja del conejo que desaparece 83
Paradoja del interior exterior del toro 86
Paradojas de construcción, de Vitali 155
Paradojas del infinito (Paradoxien des Unendlichen) 131
Peano, Giusseppe 146
Pickering, Andrew 214
plano complejo 165
Platónico 18
platonismo 18
Poincaré, Henri 30, 219, 221
Polinómico y no polinómico, problemas 220
polos 174
Polvo de Cantor. Véase Conjunto de Cantor
Porkert, Adele 49
positivismo lógico 46
preimagen 99
Premios a problemas del milenio 219
primeros problemas de Hilbert 29
Principio de incertidumbre 41
principio Go-Go 202, 213
Problema del mapa de cuatro colores 228
producto interno 104
propiedad de Baire 222
protones 209
Proyecto Flyspeck 229
Ptolomeo, Claudio 190

qbit 226
quarks 209
Quinto postulado de Euclides 57

reacción de Yukawa 211
realismo matemático 18
reflexión 106
reflexión deslizante 106
relatividad. Véase teoría especial de la relatividad
replicadores 198
Riemann, Bernhard 50, 58, 219
Riemann, geometrías de 50
Robinson, R. M. 210
rompecabezas falaces 67
rotación 90, 157
Rucker, Rudy 47
Russell, antinomia de 74
Russell, Bertrand 30, 31, 33, 46, 74, 214
Russell, paradoja de 99

Schröder-Bernstein, técnica de 145
Schröder-Bernstein, teorema de 96
Segundo Congreso Internacional de Matemáticos 29
Shor, Peter 227
Sierpinsky, Waclaw 162
Sierpinsky-Mazurkiecwicz, paradoja de 162, 165
Simpson, paradoja de 71, 85
singularidad inicial 203
Steinhaus, Hugo 36
Stewart, Ian 159, 161, 224
subconjunto 91
suprayección 130
Svozil, Karl 202, 208, 213

Tangrama 110
Tarsky, Alfred 34, 37, 116
técnica de Schröder-Bernstein 145
teorema de Banach-Schröder-Bernstein 96, 186
teorema de Banach-Tarski 14, 16, 156, 174, 180, 203
Teorema de Cantor 97
Teorema de incompletitud, de Gödel 53, 218
Teorema de Pitágoras 113
teorema de Schröder-Bernstein 96
Teorema de unicidad 170
teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien 111
teoría de la relatividad especial 191
teoría de los tipos 75
teoría de Yang-Mills 220
teoría del big-bang 203
teoría del estado estable 203
teoría heliocéntrica 190
teorías de conjuntos no cantorianas 218
Tipo 1. Paradoia 68. 129

Tipo 1, Tipo 2 o Tipo 3. Véase paradoja Tipo 1, paradoja Tipo 2 o paradoja Tipo 3
Tipo 2, paradoja 68, 129
Tipo 3, paradoja 68, 74
Tipo E (tiempo exponencial) 220
Tipo NP (tiempo polinómico no determinista) 220
Tipo P (tiempo polinómico) 220
toro 73, 86
traslación 101
Triángulo de Curry 82

último teorema de Fermat 222, 227
unión de 93

vacío 200
versión de amplificación 40, 180
versión de duplicación 40, 167, 180
versión fuerte 40, 180
Vitali, conjunto de 155
Vitali, Giuseppe 155
von Neumann, John 41

Wagon, Stan 12, 14, 62, 231
Wahrheitsbgriff 42
Wallace-Bolyai-Gerwien, teorema de 111
Wallis, John 23
Weyl, Hermann 30, 46, 97
Wiles, Andrew 222, 227

Yang, Chen-Nin 220
Yang-Mills, teoría de 220
Yukawa, reacción de 211

Zenón 22
Zermelo, Ernst 31, 54
Zermelo-Fränkel 32
Zermelo-Fränkel, teoría de conjuntos de 32

Siendo rector de la Universidad Veracruzana
el doctor Raúl Arias Lovillo,
El chícharo y el sol. Una paradoja matemática, de Leonard M. Wapner,
se terminó de imprimir en febrero de 2011,
en los talleres de Editorial Ducere, S. A. de C. V.,
Rosa Esmeralda 3 bis, Col. Molino de Rosas, C. P. 01470, México, D. F.
La edición consta de mil ejemplares más sobrantes para reposición.
Para su composición se utilizaron tipos Palatino de 11:15 y 30:34 puntos.
Formación: Aída Pozos Villanueva; edición: Silverio Sánchez Rodríguez.

"Tenemos así el Teorema o la Paradoja de Banach-Tarski. En una forma equivalente de este teorema se establece que se puede dividir en un número finito de partes un sólido de cualquier tamaño, digamos un chícharo, y luego volver a armarlo para formar otro sólido de cualquier forma y volumen especificados, digamos los del sol. En consecuencia, a este paradójico teorema de Stefan Banach y Alfred Tarski se le llama a veces la paradoja del chícharo y el sol." Tal fue la sencilla introducción que Len Wapner tuvo a la asombrosa paradoja Banach-Tarski en un aula de la Universidad de California, en Los Ángeles. Ante la aturdida suspicacia de sus alumnos, el catedrático remata: "Bien, ¿saben? Es sólo una de esas cosas que ocurren porque ocurren. Resultados como éste son comunes cuando trabajamos con conjuntos no mensurables, el axioma de elección, etcétera. La prueba es válida y el teorema se acepta".

El teorema del chícharo y el sol, desde su publicación en 1924, causó gran controversia en el ámbito de las matemáticas teóricas e incluso en algunos sectores ajenos en los que la paradoja fue conocida, al grado de que un ciudadano demandó ante el congreso en Illinois declarar el postulado fuera de la ley y por tanto la prohibición de su enseñanza en las escuelas.

El carácter sorprendente de la paradoja, aunado a la poca difusión de la misma entre el público en general, motivaron al autor para acometer la tarea de trasladar a un lenguaje accesible los términos sumamente especializados de la teoría matemática. El resultado es este volumen en que el lector asistirá al despliegue de la paradoja Banach-Tarski en un estilo ágil y llano que al mismo tiempo mantiene el rigor que exige la demostración en la metodología de las ciencias duras.

Leonard M. Wapner es profesor de matemáticas en el colegio El Camino, en Torrence, California. Obtuvo su BA (Bachelor in Arts) y su MAT (Master of Arts in Teaching) en matemáticas por parte de la Universidad de California, en Los Ángeles, EUA. A lo largo de su carrera docente ha escrito diversos artículos sobre la enseñanza de las matemáticas en *The Mathematics Teacher* y *The AMATYC Review*. *El chícharo y el sol. Una paradoja matemática* es su primer libro.

Universidad Veracruzana
Dirección General Editorial

ISBN: 978-607-502-065-5